Caracterizaciones topológicas de algunos de los subespacios singulares de la recta real.
Aplicaciones importantes en Topología General

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Curso 2020-21

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA

Grado en Matemáticas

Saúl Rodríguez Martín

Tutora: María Isabel Garrido Carballo

Madrid, a 6 de julio de 2021

Abstract

This work is a summary of the basic topological properties of some important subspaces of the real line: the real line itself, the sets of rational and irrational numbers, the compact interval $[0,1]$ and the Cantor set, all of them with the subspace topology inherited from $\mathbb{R}$. These spaces were studied by some of the most brilliant topologists of the 20^{th} century, like Brouwer, Sierpinski, Hausdorff or Mazurkiewicz. Moreover, new ways to prove some famous results about these spaces keep appearing to this day. Apart from proving well known topological characterizations of these spaces, we will study their universal properties, that is, their subspaces, their continuous images and their images by quotient maps.

Resumen

Este trabajo resume las propiedades topológicas básicas de algunos subespacios singulares de la recta real: la propia recta real, los conjuntos de los racionales y los irracionales, el intervalo compacto $[0,1]$ y el conjunto de Cantor, todos ellos con la topología que adquieren como subespacios de $\mathbb{R}$. Estos espacios fueron estudiados por algunos de los grandes topólogos del siglo XX, como Brouwer, Sierpinski, Hausdorff o Mazurkiewicz. Además, hasta día de hoy se siguen descubriendo nuevas formas de probar algunos resultados importantes sobre estos espacios. A parte de probar las conocidas caracterizaciones topológicas de estos espacios, vamos a estudiar sus propiedades universales, es decir, sus subespacios, sus imágenes continuas y sus imágenes por aplicaciones cociente.

Índice

Introducción

En este trabajo estudiaremos desde un punto de vista topológico algunos subespacios importantes de la recta real. En concreto estos espacios son $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, los irracionales, que llamaremos $\mathbb{I}$, el conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ y el intervalo $[0,1]$, que llamaremos $\mathbf{I}$. Estos espacios suscitaron interés en los matemáticos desde el mismo surgimiento de la teoría de conjuntos y la topología como ramas de las matemáticas, entre finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Ya en 1910, Brouwer probó en [Br10] una sorprendente caracterización topológica de $\mathcal{C}$: todo espacio topológico metrizable, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Así demostró también que es posible determinar la topología de algunos espacios mediante unas pocas propiedades topológicas sencillas. Siguiendo esta idea, Sierpinski probó en [Si20] una caracterización de $\mathbb{Q}$, y Hausdorff hizo lo mismo con $\mathbb{I}$ en [Ha37]. En la primera parte del trabajo, que corresponde a los tres primeros capítulos, se demostrarán estos tres teoremas.

Las caracterizaciones de $\mathcal{C}$ y $\mathbf{I}$ se demuestran de forma muy similar: primero definimos los espacios $2^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, que son homeomorfos a $\mathcal{C}$ y $\mathbf{I}$ respectivamente pero son más fáciles de tratar. Después, partimos de un espacio X con las propiedades que caracterizan $\mathcal{C}$ o $\mathbf{I}$ y construimos un homeomorfismo entre X y $2^{\mathbb{N}}$ o $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ respectivamente. Este homeomorfismo se crea mediante un algoritmo que es casi igual en ambos casos.

La caracterización de $\mathbb{Q}$ (Teorema de Sierpinski) también se puede demostrar de forma algorítmica creando un homeomorfismo. Por ejemplo, este reciente artículo [Bl19] usa tal método para dar una demostración totalmente elemental del Teorema de Sierpinski. Pero este TFG, aprovechando las herramientas de los capítulos anteriores, va a seguir otro camino para probarlo. Lo que haremos será demostrar que $\mathcal{C}$ e $\mathbb{I}$ tienen un muy alto grado de homogeneidad: son homogéneos por numerables densos. Esta propiedad implica que todo par de subespacios numerables densos de $\mathcal{C}$ o $\mathbb{I}$ son homeomorfos, lo cual nos permitirá demostrar muy fácilmente el Teorema de Sierpinski. La propiedad de homogeneidad por numerables densos es interesante en general, y por ello la demostramos también para $\mathbb{R}$. También estudio una propiedad de homogeneidad incluso más fuerte de estos espacios, que está incluida en el apéndice A ya que se aleja un poco del tema central del trabajo.

También estudiaremos propiedades universales de $\mathcal{C}, \mathbb{I}$ y $\mathbb{Q}$: sus imágenes continuas, subespacios topológicos y cocientes, y cuando sea posible los caracterizaremos salvo homeomorfismo. Especialmente célebre es el Teorema de Hausdorff-Alexandroff, probado en 1927, que afirma que todo espacio métrico compacto es la imagen por una función continua del conjunto de Cantor (y por tanto es un cociente de $\mathcal{C}$).

La segunda parte del trabajo se centra en $\mathbb{R}$ e $\mathbf{I}$. Empezamos el capítulo 4 demostrando algunas propiedades de las topologías de orden y la topología usual en $\mathbb{R}$. Después pasamos a estudiar los continuos, es decir, espacios T_2, compactos y conexos. Son unos espacios muy estudiados que nos servirán para caracterizar $\mathbf{I}$ y son una herramienta necesaria para probar los resultados del siguiente capítulo.

El capítulo 5 se dedica a otro tema de especial interés para los topólogos de finales del siglo XIX y principios del XX: las curvas, es decir, funciones continuas desde $\mathbf{I}$ a un espacio topológico. En 1890, Peano encontró algo increíble: una función continua sobreyectiva de $\mathbf{I}$ sobre $\mathbf{I}^2$, es decir, una curva que recubría todo el cuadrado, y por tanto tenía área positiva. La pregunta natural era, ¿qué más espacios podrían recubrirse con una curva? El conocido teorema de Hahn-Mazurkiewicz, probado por primera vez por Hahn en 1914, da respuesta a esa pregunta, afirmando que un espacio T_2 se puede recubrir con una curva si y solo si es metrizable, compacto, conexo y localmente conexo. Unos años más tarde, Mazurkiewicz prueba en [Ma20] que todo espacio metrizable, localmente compacto, conexo y localmente conexo es una imagen continua de $\mathbb{R}$, aunque en este caso el recíproco no se cumple. Estos dos teoremas son los principales objetivos de la segunda parte. Otro resultado que probamos es que un espacio T_2 es conexo por caminos si y solo si es conexo por arcos, es decir, dados dos puntos del espacio podemos encontrar un subespacio homeomorfo a $\mathbf{I}$ que los contiene. Este resultado puede parecer engañosamente fácil de demostrar pero no lo es. Usando los resultados de este tema, damos una caracterización de $\mathbb{R}$ en la última sección.

Mi principal objetivo al hacer el trabajo ha sido, como indica su título, hacer un estudio sistemático de la topología de los subespacios mencionados de $\mathbb{R}$ y sus propiedades universales. También he intentado que aparezcan muchos teoremas a mi juicio impresionantes (1 por sección aproximadamente). Todo esto, claro, dentro de las limitaciones de espacio de un TFG. Esto significa que no he podido tratar algunos temas que podrían haber encajado bien en este trabajo, como ultramétricas o algunos teoremas de encajes, y temas como continuos o teoría descriptiva de conjuntos podrían haberse aprovechado más. De todas formas, ha quedado más extenso de lo habitual debido a que este ha sido el proyecto que he elegido desarrollar al recibir una de las Becas de Colaboración con Departamentos otorgadas por el Ministerio de Educación y Formación Profesional[1].

Al principio de cada sección indico en qué está basado el contenido de la sección, incluyendo referencias a ser posible. La mayoría del contenido del trabajo está sacada de los libros y artículos de la bibliografía, aunque muchos resultados están demostrados de forma distinta para que el trabajo esté autocontenido. En concreto la mayoría del tema 3 y las dos últimas secciones del tema 5 no siguen ninguna fuente particular. También hay algunos resultados 'originales' (que no he encontrado enunciados en ningún otro sitio): el teorema 3.18 y los resultados del anexo A.

Este trabajo está diseñado para que lo pueda entender un alumno que haya superado un primer curso de topología elemental. Sin embargo hay tres resultados muy conocidos que uso sin demostrar por falta de espacio y que pueden no aparecer en un curso introductorio de topología:

Teorema 0.1. *(Teorema de metrización de Urysohn) Si X es un espacio regular y de base numerable, entonces es metrizable.*

Teorema 0.2. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

Teorema 0.3. *(Clasificación de las 1-variedades sin borde) Si X es T_2, de base numerable, conexo y todo punto de X tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$, entonces X es homeomorfo o bien a $\mathbb{R}$ o bien a $\mathbb{S}^1$ (la circunferencia).*

El teorema 0.1 es el teorema 23.1 en [Wi70]. Una bonita prueba de 0.2 en una página está en [Ru69]. El tercero, 0.3, solo se usa en la última sección, y es el teorema 5.27 de [Le10].

[1] Más info en www.educacionyfp.gob.es/ca/servicios-al-ciudadano/catalogo/general/99/998142/ficha/998142-2020.html

Capítulo 1

El conjunto de Cantor, $\mathcal{C}$

En este primer capítulo estudiamos el conjunto de Cantor y un conjunto muy relacionado, $2^{\mathbb{N}}$. Damos caracterizaciones de $\mathcal{C}$ como espacio topológico y como espacio métrico, caracterizamos qué espacios son imágenes continuas de $\mathcal{C}$, y cuáles son homeomorfos a un subespacio suyo. Por último hablamos del alto grado de homogeneidad que tiene $\mathcal{C}$. Aparte del interés propio del capítulo, en él desarrollamos herramientas para probar dos de los resultados más importantes de este trabajo, el teorema de Sierpinski y el teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

1.1 $\mathcal{C}$ y $2^{\mathbb{N}}$

El conjunto de Cantor suele definirse geométricamente como el obtenido por el siguiente proceso: Partimos del intervalo $[0,1]$, que llamamos C_0. Si le quitamos su 'tercio central', $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, obtenemos un conjunto C_1 unión de dos intervalos cerrados, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Quitando los dos tercios centrales de estos intervalos, obtenemos un conjunto C_2 formado por cuatro intervalos cerrados. Mediante este proceso obtenemos conjuntos C_n unión de 2^n intervalos cerrados de longitud $\frac{1}{3^n}$

Figura 1.1: Primeros C_i en la construcción de $\mathcal{C}$

Definición 1.1. El conjunto de Cantor es $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} C_n$, con su topología como subespacio de $\mathbb{R}$.

Es fácil ver que un número x de $[0,1]$ está en C_n sii se puede escribir en base 3, $x = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ de forma que las primeras n cifras decimales, $a_1, \dots, a_n$ son 0 o 2. Por tanto un número $x \in [0,1]$ estará en $\mathcal{C}$ sii x tiene un desarrollo en base 3 cuyas cifras decimales son todas 0 o 2: por ejemplo, $\frac{1}{3} = 0.02222\dots$ Esta definición alternativa será la útil:

$$\mathcal{C} = \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n} ; a_n \in \{0,2\} \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}$$

Es decir, podemos pensar en los elementos de $\mathcal{C}$ como sucesiones de ceros y doses. El conjunto de sucesiones de ceros y unos va a ser importante, veamos algo de notación para poder hablar sobre él:

Notación 1.2. *($2^{\mathbb{N}}$ y su topología)*
Llamaremos $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.
Llamamos $2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}; a_n \in \{0,1\}\}$ al conjunto de sucesiones de ceros y unos.
Llamamos $2^{<\mathbb{N}}$ al conjunto de sucesiones finitas de ceros y unos, incluyendo la sucesión de longitud 0, $()$. La concatenación se escribirá con el símbolo $\wedge$: $(a_1, \dots, a_n) \wedge (b_1, \dots, b_m) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$.
Por último, 2^n será el conjunto de sucesiones de n ceros y unos, y si $(a_n) \in 2^{\mathbb{N}}$, $a|_n$ será la sucesión de los primeros n términos de a: $a|_n = (a_1, \dots, a_n)$.
Viendo $2^{\mathbb{N}}$ como un producto numerable de espacios $\{0,1\}$ con la topología discreta, le podemos otorgar la topología producto. Una base de abiertos que genera esta topología se obtiene de asociar a cada sucesión finita de ceros y unos $(b_1, \dots, b_{k-1})$ el abierto

$$B_{b_1 \dots b_{k-1}} = \{(a_n) \in 2^{\mathbb{N}}; a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}\}.$$

Es decir, $B_{b_1 \dots b_{k-1}}$ contiene las sucesiones de ceros y unos que empiezan por $b_1, \dots, b_{k-1}$.

Tras introducir $2^{\mathbb{N}}$, vamos a ver que de hecho es homeomorfo al conjunto de Cantor. El homeomorfismo consistirá en mandar cada sucesión (a_n) al número x que tiene a $(2a_n)$ por desarrollo en base 3 (y por tanto tiene un desarrollo en base 3 con solo ceros y doses).

Teorema 1.3. *La función*

$$\begin{array}{rccc} f: & 2^{\mathbb{N}} & \to & \mathcal{C}; \\ & (a_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2a_n 3^{-n} \end{array}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Como por el teorema de Tychonoff $2^{\mathbb{N}}$ es compacto y $\mathcal{C}$ es T_2 (al ser subespacio de $\mathbb{R}$), nos basta con ver que f es biyectiva y continua.

La imagen de f serán exactamente los números que se pueden escribir de forma $0, a_1 a_2 \dots$ en base 3, siendo a_i cero o dos. Esto es exactamente $\mathcal{C}$, por tanto f está bien definida y es sobreyectiva.
Para ver que f es inyectiva, supongamos que (a_n) y (b_n) son sucesiones distintas de $2^{\mathbb{N}}$. Sea k la primera posición tal que $a_k \neq b_k$. Entonces,

$$f((b_n)) - f((a_n)) = 2\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)3^{-i} = 2 \cdot 3^{-k}\left(b_k - a_k + \sum_{i=1}^{\infty}(b_{i+k} - a_{i+k})3^{-i}\right).$$

Esto no es 0, ya que $|b_k - a_k| = 1$ y $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}(b_{i+k} - a_{i+k})3^{-i}\right| \leq \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i}\right| = \dfrac{1}{2}$.
Por tanto $f((a_n)) \neq f((b_n))$, y f es inyectiva.

Solo nos queda ver que f es continua. Pero por lo que acabamos de ver, si $(a_n) \neq (b_n)$, entonces $|f((b_n)) - f((a_n))| \leq 2 \cdot 3^{-k}(1 + \frac{1}{2}) = 3^{-k+1}$, donde k es la primera cifra con $a_k \neq b_k$. Usemos ahora la definición de continuidad punto a punto.
Sea $x \in \mathcal{C}$, $x = f((a_n))$ y un entorno suyo $B(x, \varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Sea k tal que $3^{-k} < \varepsilon$. Entonces el abierto $B_{a_1 \dots a_k}$ entorno de (a_n) en $2^{\mathbb{N}}$ cumplirá que $f(B_{a_1 \dots a_k}) \subseteq B(x, \varepsilon)$ ya que si tenemos cualquier (b_n) en $B_{a_1 \dots a_k}$, (a_n) y (b_n) no podrán tener cifras distintas hasta la posición $k+1$, por tanto $|f((b_n)) - f((a_n))| \leq 3^{-k} < \varepsilon$. $\square$

1.2 Caracterización topológica de $\mathcal{C}$: Teorema de Brouwer

Los contenidos y notación de esta sección son similares a parte del capítulo 10 de [Tr97]. El único añadido es el lema 1.5, ya que ser 0-dimensional y tener base numerable son propiedades más usadas que tener base numerable de clopens, así que es preferible que esas dos propiedades sean las que aparezcan en 1.6.

Por 1.3 está claro que $\mathcal{C}$ es T_1 compacto, de base numerable (por ser un producto numerable de espacios de base numerable) y no tiene puntos aislados, por ser un producto de infinitos espacios con más de 1 punto. Solo hará falta una propiedad sencilla más para caracterizar topológicamente el conjunto de Cantor:

Definición 1.4. Un espacio topológico es *0-dimensional* [1] si tiene una base de conjuntos clopen.

Donde llamo clopens en un espacio a sus subespacios abiertos y cerrados.

Lema 1.5. *Si X es un espacio de base numerable y 0-dimensional, entonces X tiene una base numerable de conjuntos clopen.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base numerable de X, y $\mathcal{B}$ una base de clopens. Entonces, cada A_n también tiene base numerable por ser subespacio de X, por tanto en concreto es de Lindelöf. Esto implica que cada A_n tiene un recubrimiento numerable por elementos $(B_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}$ contenidos en A_n. Entonces, está claro que los $B_{n,i}$, con $n, i \in \mathbb{N}$, forman una base numerable de clopens de X. □

Teorema 1.6 (Brouwer, 1910)**.** *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio topológico T_1, compacto, de base numerable, 0-dimensional y sin puntos aislados. Entonces X es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$.*

La idea de la demostración es sencilla. Podemos considerar que el conjunto de Cantor está hecho a base de dividir en 2 repetidamente el intervalo unidad: Como hemos visto en su construcción, primero lo dividimos en 2 para obtener 2 intervalos $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$.

Después a su vez dividimos estos intervalos para obtener 4 intervalos más pequeños:
$I_{00} = [0, \frac{1}{9}], I_{01} = [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}], I_{10} = [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}], I_{11} = [\frac{8}{9}, 1]$, y así sucesivamente podemos definir I_ξ para cada $\xi \in 2^{<\mathbb{N}}$. Los puntos del conjunto de Cantor se obtienen cogiendo una sucesión de intervalos encajados cada vez más pequeños y tomando su intersección, que será un solo punto. Intentaremos replicar ese proceso en nuestro espacio X usando las propiedades del enunciado.

Demostración. Por 1.5, X tendrá una base $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de conjuntos clopen. Ahora vamos a definir recursivamente un conjunto clopen I_ξ de X para cada $\xi \in 2^{<\mathbb{N}}$. Definimos el caso base como $I_{()} = X$.

Ahora supongamos que hemos definido I_ξ y es no vacío, vamos a definir $I_{\xi\wedge(0)}$ e $I_{\xi\wedge(1)}$ (en notación de 1.2).

Como I_ξ es abierto y X no tiene puntos aislados, I_ξ tiene al menos 2 puntos x, y. Como X es T_1, hay un abierto que contiene a x y no a y, por tanto hay algún B_k que contiene a x y no a y, es decir, $B_k \cap I_\xi$ es un subconjunto propio no vacío de I_ξ. Sea ahora el menor n tal que $B_n \cap I_\xi$ es un subconjunto propio no vacío de I_ξ. Definimos $I_{\xi\wedge(0)} = I_\xi \cap B_n$ e $I_{\xi\wedge(1)} = I_\xi - B_n$. Así construidos, los I_ξ tendrán estas propiedades:

(1) I_ξ es un conjunto clopen (compacto) no vacío para todo $\xi \in 2^{<\mathbb{N}}$.

(2) Para todo n, $\{I_\xi; \xi \in 2^n\}$ es una partición de X en 2^n conjuntos clopen.

(3) Si ξ tiene longitud n y $m < n$, entonces I_ξ o bien está contenido en B_m o bien es disjunto con B_m.

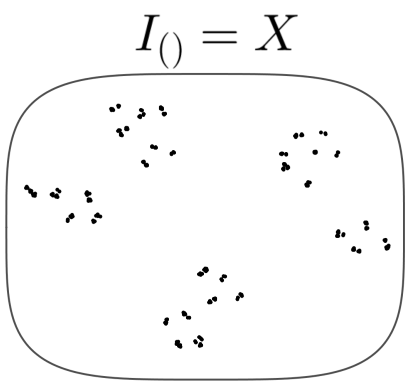
Es directo probar (1) y (3) por inducción sobre la longitud de ξ. Para probar (2) basta usar inducción sobre n y el hecho de que para cualquier ξ, $I_{\xi\wedge(0)}$ y $I_{\xi\wedge(1)}$ son una partición de I_ξ.

El homeomorfismo que queremos construir es el siguiente:

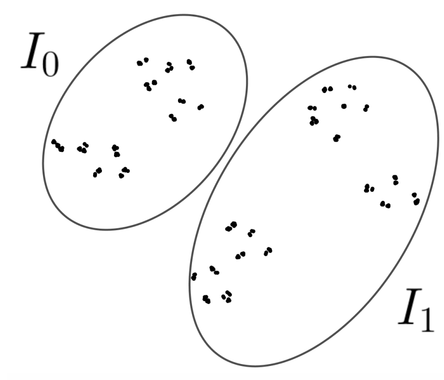
$$\begin{array}{rccc} f: & 2^{\mathbb{N}} & \to & X; \\ & (a_n) & \mapsto & y \end{array} \text{, donde } \{y\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{a|_n}.$$

Para ver que f está bien definida necesitamos ver que dada una sucesión (a_n), $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{a|_n}$ tiene un solo punto. Está claro que no puede tener más de un punto, ya que si tuviera dos puntos x, y, habría cierto k tal

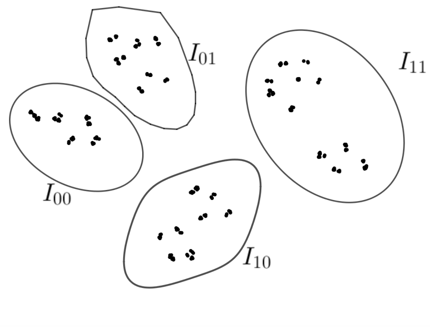
[1] Hay varias definiciones de dimensión de un espacio en topología. En el caso de espacios métricos separables, que es el que nos ocupa, todos los conceptos de espacio 0-dimensional coinciden con la definición anterior.



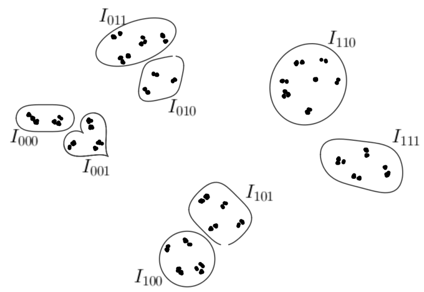
(a) I_ξ, con ξ de longitud 0.



(b) I_ξ, con ξ de longitud 1.



(c) I_ξ, con ξ de longitud 2.



(d) I_ξ, con ξ de longitud 3.

Figura 1.2: Los I_ξ de longitud n, para n dado, son particiones binarias de X en 2^n clopens.

que $x \in B_k$ e $y \notin B_k$, y entonces, como por (3) $I_{a|_{k+1}}$ o bien está contenido en B_k o bien es disjunto con B_k, $I_{a|_{k+1}}$ no puede contener a x y a y, contradiciendo nuestra suposición.

Además, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{a|_n}$ no puede ser vacío ya que $\{I_{a|_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene la propiedad de la intersección finita (es una cadena de cerrados no vacíos), y el espacio X es compacto, por tanto la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a|_n}$ no es vacía.

Veamos ahora que f es biyectiva. Es inyectiva ya que si $(a_n) \neq (b_n)$, hay k con $a|_k \neq b|_k$, por tanto por (2) $I_{a|_k} \cap I_{b|_k} = \varnothing$, así que $f((a_n)) \neq f((b_n))$. Es sobre ya que dado $x \in X$, $x = f((a_n))$, donde podemos crear (a_n) recursivamente eligiendo en cada paso a_k de forma que $x \in I_{a|_k}$

f es continua ya que dado un abierto de la base de X, B_n, por (2) y (3) $f^{-1}(B_n)$ estará formada por la unión de algunos B_ξ, con $\xi \in 2^{n+1}$, y por tanto será abierto.

f^{-1} es continua ya que dado un abierto de la base de $2^{\mathbb{N}}$, B_ξ, $f(B_\xi) = I_\xi$ es un conjunto clopen de X. □

A partir de ahora diremos que X es un conjunto de Cantor o espacio de Cantor si cumple el teorema 1.6.

Corolario 1.7. *El producto numerable de espacios finitos discretos de ≥ 2 puntos es un espacio de Cantor.*

Demostración. Sea $K = \prod_{n\in\mathbb{N}} K_n$, con K_n finitos discretos. K es T_2 ya que K_n lo es $\forall n$, es compacto por el teorema de Tychonoff, es de base numerable por ser producto numerable de espacios de base numerable, y no tiene puntos aislados ya que es un producto de infinitos espacios de más de un punto. Por último es 0-dimensional: su subbase como espacio producto (imágenes inversas de abiertos por las proyecciones) está compuesta por conjuntos clopen al ser los K_n discretos, por tanto su base compuesta por intersecciones finitas de ellos también está compuesta por clopens. □

En concreto, $n^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$ si $n \geq 2$, considerando $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ como un espacio discreto de n puntos.

1.3 Caracterización métrica de $\mathcal{C}$

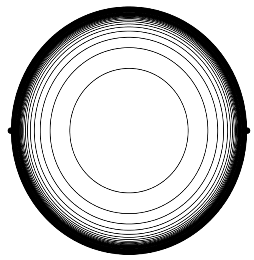
Hay una caracterización más conocida del conjunto de Cantor para espacios metrizables y de hecho es una consecuencia de la anterior. Para demostrarlo usaremos un par de resultados sobre conexión en espacios compactos T_2, que más tarde también nos serán útiles en la sección sobre continuos. El primero, 1.9, es el teorema 6.1.22 de [En89].

Definiciones 1.8. Un espacio X es *conexo* si no es unión disjunta de dos abiertos no vacíos, o equivalentemente si no hay un subespacio propio no vacío clopen de X.

Una *componente conexa* de un espacio es un subespacio conexo maximal respecto a la inclusión.

La *cuasicomponente conexa* de un punto x en un espacio X es la intersección de todos los conjuntos clopen en X que contienen a x.

Un espacio X es *totalmente disconexo* si para todo $x \in X$, $\{x\}$ es una componente conexa, es decir, si no hay subespacios conexos de más de 1 punto.



Sabemos que componentes y cuasicomponentes son cerradas, y que forman particiones del espacio. Además, es fácil ver que la componente conexa de un punto está contenida en su cuasicomponente, usando que al ser conexa, la componente no puede tener ningún subconjunto clopen propio. Sin embargo, el recíproco no es cierto en general. Por ejemplo, si pensamos en el conjunto de la figura formado por los puntos $(-1,0)$, $(1,0)$ y las circunferencias de centro 0 y radio $1-\frac{1}{n}$ para $n \geq 2$, la componente del punto $(1,0)$ contiene solo a ese punto. Sin embargo, no es difícil ver que la cuasicomponente de $(1,0)$ es el conjunto $\{(1,0),(-1,0)\}$. De todas formas, en el caso de compactos T_2 sí que se cumple el otro contenido:

Lema 1.9. *Si X es un espacio compacto T_2 y $x \in X$, la componente de x y su cuasicomponente coinciden.*

Demostración. Como la componente está contenida en la cuasicomponente, nos bastará con comprobar que la cuasicomponente de x, que llamaremos Q, es conexa. Q es cerrada, por ser la intersección de los conjuntos clopen que contienen a x. Supongamos que hay una separación de Q, $Q = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 disjuntos y cerrados en Q y $x \in X_1$. Entonces X_1 y X_2 son cerrados en X, por tanto como X es normal, hay conjuntos U, V disjuntos abiertos en X con $X_1 \subseteq U$, $X_2 \subseteq V$. $U \cup V$ es un entorno de Q. Si llamamos $\{F_\alpha\}_\alpha$ a los conjuntos clopen que contienen a x, entonces $\{X - F_\alpha\}_\alpha$ es un recubrimiento abierto del compacto $X - (U \cup V)$. Por tanto habrá finitos $F_{\alpha_1}, \ldots, F_{\alpha_n}$ cuyos complementarios recubren $X - (U \cup V)$. Por tanto, $F = \bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$ es un entorno clopen de Q contenido en $U \cup V$.

Entonces, sabemos que $U \cap F$ es abierto, y además, $\overline{U \cap F} \subseteq \overline{U} \cap \overline{F} = \overline{U} \cap F = \overline{U} \cap (U \cup V) \cap F = U \cap F$. Por tanto $U \cap F$ es un clopen, y contiene a x, así que $Q \subseteq U \cap F$. Pero entonces $X_2 \subseteq Q \cap V \subseteq U \cap F \cap V = \varnothing$, es decir, $X_2 = \varnothing$. Esto prueba que Q es conexa. $\square$

Lema 1.10. *Sea X un espacio compacto, T_2 y totalmente disconexo. Entonces X es 0-dimensional.*

Demostración. Sea $x \in X$ y U un entorno de x. Por 1.9, al ser $\{x\}$ la componente de x, para cada $y \neq x$ habrá un conjunto clopen que contiene a y pero no a x, O_y. Como los O_y recubren $X - U$, que es compacto, habrá finitos conjuntos clopen $O_{y_1}, \ldots, O_{y_n}$ que recubren $X - U$. Llamando $C = \cap_{i=1}^n (X - O_{y_i})$, C es un conjunto clopen con $x \in C \subseteq U$, como queríamos. $\square$

Ya estamos listos para demostrar la caracterización.

Teorema 1.11. *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio metrizable, compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Entonces X es un conjunto de Cantor.*

Demostración. Para usar el teorema 1.6 necesitamos ver que X es 0-dimensional y de base numerable. Por 1.10, X será 0-dimensional. También será de base numerable porque al ser compacto, es Lindelöf, y las propiedades Lindelöf y de base numerable son equivalentes en espacios métricos. $\square$

1.4 Imágenes continuas de $\mathcal{C}$. Teorema de Hausdorff-Alexandroff

Veamos qué espacios son imágenes continuas del conjunto de Cantor, es decir, para qué espacios X existe una función continua $f : \mathcal{C} \to X$ sobreyectiva. Obviamente, tales espacios X tendrán que ser compactos. Por conveniencia ignoraremos los espacios que no sean T_2, ya que en ese caso, como se puede ver en [DS14], aparecen espacios patológicos. En 1.14 vamos a obtener una bonita caracterización de las imágenes continuas T_2 del conjunto de Cantor. Antes probamos como en [Sc74] el conocido Teorema de Hausdorff-Alexandroff, que nos dice que todo espacio métrico compacto es una imagen continua de $\mathcal{C}$.

Teorema 1.12 (Hausdorff-Alexandroff, 1927)**.** *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio métrico compacto. Entonces hay una función continua sobreyectiva $f : \mathcal{C} \to X$.*

En la prueba usaremos que todo espacio X métrico compacto es totalmente acotado: dado $\varepsilon > 0$, X (y, por tanto, cualquier subconjunto suyo) tiene un recubrimiento con finitos subconjuntos de diámetro $< \varepsilon$. De hecho, también para uso posterior, probaremos un lema que caracteriza los espacios métricos compactos.

Lema 1.13. *Un espacio métrico (X, d) es compacto si y solo si es completo (2.3) y totalmente acotado.*

Demostración. Supongamos que X es compacto. Dado $\varepsilon > 0$, $\{B(x, \frac{\varepsilon}{3}); x \in X\}$ es un recubrimiento de X por abiertos de diámetro $< \varepsilon$. Tomando un subrecubrimiento finito ya tenemos que X es totalmente acotado. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en X, tendrá un punto de acumulación x. Dado $\varepsilon > 0$, cogemos N tal que $\forall m, n \geq N, d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x_N, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces para cada $n > N, d(x_n, x) < \varepsilon$. Esto demuestra que x_n es convergente, y X es completo.

Supongamos ahora que X es completo y totalmente acotado, veamos que toda sucesión x_n tiene algún punto de acumulación. Sea $\mathcal{B}_n$ un recubrimiento finito de X por subconjuntos de diámetro $< \frac{1}{n}$. Hay un miembro de $\mathcal{B}_1$ que contiene infinitos términos de la sucesión, y por tanto hay una subsucesión $x_{1,n}$ de x_n que tiene diámetro < 1. Usando este proceso recursivamente, creamos para cada $i \in \mathbb{N}$ una sucesión $(x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ que será una subsucesión de $x_{i-1,n}$ que esté contenida en un elemento de $\mathcal{B}_i$, y por tanto tenga diámetro $< \frac{1}{i}$. Si tomamos ahora la subsucesión $x_{n,n}$ de x_n, es de Cauchy, por tanto convergente a algún $x \in X$. Por tanto x_n tiene algún punto de acumulación. □

La idea de la demostración del teorema 1.12 será crear una serie de recubrimientos $\mathcal{U}_n$ de X por subconjuntos de diámetro $\leq \frac{1}{n}$, de modo que $\mathcal{U}_{n+1}$ será un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ para cada n. En base a esos recubrimientos, encontraremos un conjunto de Cantor K y una aplicación continua bastante natural de K sobre X.

Demostración del Teorema 1.12. Sea X nuestro espacio. Tendrá un recubrimiento por finitos subconjuntos no vacíos de diámetro ≤ 1, que llamaremos $\mathcal{U}_1 = \{U_i\}_{i=1,\ldots,k_1}$. Por razones técnicas (véase 1.7), ponemos $k_1 > 1$.

Ahora, para $k_2 > 1$ suficientemente grande, podremos recubrir cada U_i, desde $i = 1$ a k_1, con k_2 subconjuntos suyos no vacíos de diámetro $\leq \frac{1}{2}$. Así formamos una colección finita $\mathcal{U}_2 = \{U_{i_1 i_2}\}_{\substack{i_1=1,\ldots,k_1 \\ i_2=1,\ldots,k_2}}$, de forma que $\bigcup_{j=1}^{k_2} U_{ij} = U_i$ para todo i. De modo que, en concreto, $\mathcal{U}_2$ también recubre X.

Es decir, intuitivamente, $\mathcal{U}_2$ consiste en recubrir cada elemento de $\mathcal{U}_1$ con k_2 subconjuntos de diámetro $< \frac{1}{2}$. Vamos a continuar este proceso creando unas colecciones $\mathcal{U}_n$ de forma que cada elemento de $\mathcal{U}_{n-1}$ está cubierto por k_n subconjuntos de $\mathcal{U}_n$ de diámetro $< \frac{1}{n}$. Creamos los $\mathcal{U}_n$ recursivamente:

Para cada $n \in \mathbb{N}$ hay $k_n > 1$ tan grande que podemos crear una colección finita de subconjuntos no vacíos de diámetro $\leq \frac{1}{n}$, $\mathcal{U}_n = \{U_{i_1 \ldots i_n}\}_{i_j=1,\ldots,k_j}$, de modo que para todos $i_1, \ldots, i_{n-1}$,

$$U_{i_1,\ldots,i_{n-1}} = \bigcup_{j=1}^{k_n} U_{i_1,\ldots,i_{n-1},j}.$$

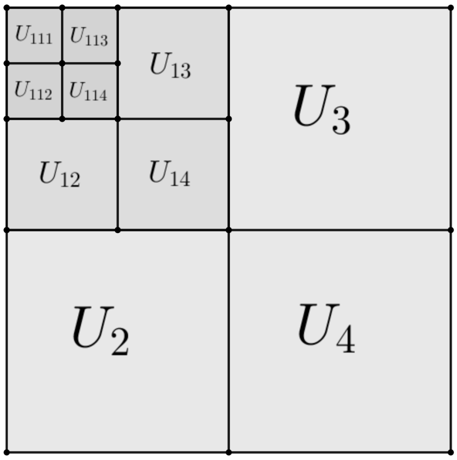


Figura 1.3: Ejemplo de construcción de los $\mathcal{U}_n$ cuando X es un cuadrado. En este caso, $\mathcal{U}_n$ se obtiene dividiendo cada cuadrado de $\mathcal{U}_{n-1}$ en 4 cuadrados. En concreto, $k_n = 4\ \forall n$.

Ya hemos creado los recubrimientos de X. Ahora, llamando K_n al espacio discreto $\{1,\dots,k_n\}$, consideramos el producto topológico:

$$K = \prod_{n=1}^{\infty} K_n, \text{el conjunto de sucesiones } s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ con } s_n \in \{1,\dots,k_n\}.$$

Por el corolario 1.7, K es un espacio de Cantor. Vamos a intentar encontrar una función continua F de K sobre X. Para ello, dada una sucesión $s = (s_n) \in K$, consideramos la sucesión decreciente de subconjuntos compactos no vacíos $A_{s,n} = \overline{U_{s_1\dots s_n}}$. Su intersección será no vacía por el teorema de la intersección de Cantor, y además como sus diámetros tienden a 0, $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_{s,n}$ tendrá exactamente un punto.

De modo que cada $s \in K$ tendrá un punto asociado $x_s = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{s,n}$.

Como es de esperar por el desarrollo de los acontecimientos, la función continua que buscamos será:

$$\begin{array}{rccl} F: & K & \to & X; \\ & s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & x_s \end{array}$$

Veamos que F es continua punto a punto: sea s una sucesión, y sea la bola $B(x_s, \frac{1}{n})$ en X. El conjunto $B_{s|_{n+1}}$ de las sucesiones r con $r_i = s_i$ para $i = 1,\dots,n+1$ es un abierto de K, así que nos bastará ver que $f(B_{s|_{n+1}}) \subseteq B(x_s, \frac{1}{n})$ para ver que f es continua.
Dado $r \in B_{s|_{n+1}}$, tenemos que $A_{s,n+1} = A_{r,n+1}$. Por tanto como $A_{s,n+1}$ tiene diámetro $\leq \frac{1}{n+1}$ y $x_r, x_s \in A_{s,n+1}$, tendremos que $d(F(s), F(r)) = d(x_s, x_r) < \frac{1}{n}$. De modo que F es continua.

Por último, comprobamos que F es sobreyectiva. Dado $x \in X$, hay un cierto $s_1 \in \{1,\dots,k_1\}$ tal que $x \in U_{i_1}$. Como $U_{s_1 j}$, $j = 1,\dots,k_2$ recubren U_{i_1}, hay cierto s_2 tal que $x \in U_{s_1 s_2}$. Repitiendo este razonamiento obtenemos una sucesión $s = (s_n)$ tal que $x \in U_{s_1\dots s_n}$ para todo n. Por tanto $x = F(s)$, ya que $x \in A_{s,n}\ \forall n$. $\square$

De modo que ya sabemos que todos los espacios métricos compactos son imágenes continuas del espacio de Cantor. De hecho, el siguiente resultado afirma que esto caracteriza todos los espacios compactos T2 que son imágenes continuas del conjunto de Cantor:

Teorema 1.14. *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio compacto T_2. Son equivalentes:*

1. *X es imagen continua del conjunto de Cantor*
2. *X tiene una base numerable*

3. *X es metrizable*

4. *X es cociente del conjunto de Cantor*

Para demostrarlo usaremos este lema (corolario 23.2 en [Wi70]):

Lema 1.15. *Si X es compacto métrico, Y es T_2 y $f : X \to Y$ es continua sobre, entonces Y es metrizable.*

Demostración. Sabemos que Y es T_2, y compacto al ser imagen continua de X, por tanto es regular. De modo que por el teorema de Urysohn 0.1 nos basta ver que Y es de base numerable.

Al ser X metrizable y compacto, será métrico y Lindelöf por tanto será de base numerable. Sea $\mathcal{B}$ una base numerable de X y sea $\mathcal{D}$ el conjunto de uniones finitas de miembros de $\mathcal{B}$, que también es numerable. Como la función f es cerrada, $Y - f(X - D)$ es abierto para cada $D \in \mathcal{D}$.

Queremos ver que la colección numerable $\mathcal{E} := \{Y - f(X - D); D \in \mathcal{D}\}$ es una base de la topología de Y. Sea $p \in Y$ y sea U entorno abierto de p. Entonces $f^{-1}(p) \subseteq f^{-1}(U)$, y $f^{-1}(p)$ es compacto por ser cerrado en X. Por tanto podemos coger finitos abiertos $B_1, \ldots, B_n$ de $\mathcal{B}$ tales que $f^{-1}(p) \subseteq B_1 \cup \cdots \cup B_n \subseteq f^{-1}(U)$. Por tanto cogiendo $D = B_1 \cup \cdots \cup B_n \in \mathcal{D}$, tenemos que $p \in Y - f(X - D) \subseteq U$, como queríamos. □

Demostración del Teorema 1.14.

$1 \iff 4$ Todo cociente del conjunto de Cantor es una imagen continua de él (por la aplicación cociente). Además, si $f : \mathcal{C} \to X$ es continua y sobreyectiva, por ser $\mathcal{C}$ compacto y X T_2, será cerrada y por tanto una aplicación cociente.

$2 \iff 3$ Ya sabemos que todo compacto métrico tiene una base numerable, y si un compacto T_2 tiene base numerable entonces es regular y de base numerable, por tanto por 0.1 es metrizable.

$1 \iff 3$ Por el lema 1.15 y el teorema de Hausdorff-Alexandroff 1.12.

□

1.5 Subespacios de $\mathcal{C}$. Otra caracterización de $\mathcal{C}$

La siguiente caracterización de los subespacios de $\mathcal{C}$ se puede encontrar en el tema 10 de [Tr97].

Teorema 1.16. *Un espacio X es homeomorfo a algún subespacio de $\mathcal{C}$ si y solo si es T_0, de base numerable y 0-dimensional.*

Demostración. Una implicación es obvia, veamos la otra. Si X es T_0, de base numerable y 0-dimensional, tiene una base numerable de conjuntos clopen, $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Consideramos la siguiente función:

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & 2^{\mathbb{N}}; \\ & x & \mapsto & (a_n) \quad , \text{con } a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin C_n \\ 1 \text{ si } x \in C_n \end{cases} \end{array}$$

Entonces, f es inyectiva por ser X 0-dimensional. Además es continua, ya que las imágenes inversas de abiertos de la subbase de $2^{\mathbb{N}}$ son los conjuntos clopen C_n y sus complementarios. Además, $f(C_n)$ serán los elementos (a_n) de $f(X)$ que cumplen $(a_n) = 1$, que son un abierto en $f(X)$. Por tanto f es homeomorfismo de X a $f(X)$. □

Si pasamos a centrarnos en los subconjuntos abiertos de $\mathcal{C}$, veremos que sorprendentemente solo hay 2 clases salvo homeomorfismo de subespacios abiertos: los compactos y los que no lo son. Para demostrar esto usamos un lema.

Lema 1.17. *Todo subespacio abierto $\neq \varnothing$ del conjunto de Cantor es una unión finita o infinita numerable de conjuntos clopen disjuntos.*

Demostración. Si $A \subseteq \mathcal{C}$ es abierto, al tener $\mathcal{C}$ una base numerable $\mathcal{B}$ de conjuntos clopen, podemos tomar los que están contenidos en A, de modo que A será una unión numerable de conjuntos clopen, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Tomando ahora $C_n = B_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$, tenemos que los C_n son conjuntos clopen disjuntos cuya unión es A. □

Teorema 1.18. *Sea A un subespacio abierto de $\mathcal{C}$. Si A es compacto (cerrado), entonces es un conjunto de Cantor. Si no, A es homeomorfo a $\mathcal{C} - \{0\}$.*

Demostración. La primera parte es directa por 1.11, ya que al ser A abierto no tendrá puntos aislados.

Si A no es compacto, por 1.17 será una unión disjunta numerable de conjuntos clopen. La unión no puede ser finita ya que entonces A sería compacto. Vamos a demostrar la segunda parte probando que cualesquiera dos subconjuntos abiertos no compactos de $\mathcal{C}$ son homeomorfos.

Si A, B son subconjuntos abiertos de $\mathcal{C}$ no compactos, entonces $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, con (A_n) y (B_n) sucesiones de conjuntos clopen no vacíos disjuntos. Por la primera parte del teorema, A_n y B_n son todos conjuntos de Cantor, y habrá un homeomorfismo $f_n : A_n \to B_n$.
Uniendo todos estos homeomorfismos, obtenemos una biyección $f : A \to B$ con $f|_{A_n} = f_n$. Esta función será de hecho un homeomorfismo. Para verlo, por simetría vale ver que es continua. Dado un abierto U de B, $U \cap B_n$ será abierto en B_n, por tanto $f^{-1}(U \cap B_n) = f_n^{-1}(U \cap B_n)$ será abierto en A_n, y por tanto será abierto en A. De modo que $f^{-1}(U) = \bigcup_n f^{-1}(U \cap B_n)$ es abierto en A. □

De modo que tanto $\mathcal{C}$ como $\mathcal{C} - \{0\}$ tienen exactamente una clase de subconjuntos abiertos compactos (no vacíos) y exactamente una clase de subconjuntos abiertos no compactos. Esta propiedad es muy restrictiva, y vamos a ver que de hecho, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{C} - \{0\}$ son los únicos espacios métricos que lo cumplen. Para demostrar esta caracterización, que se puede encontrar en [SG75], vamos a necesitar una herramienta que no vamos a desarrollar hasta el principio del capítulo sobre contínuos. Dicho capítulo es independiente del resto, osea que no será un problema. El resultado que usamos es 4.11, que expresado en términos elementales quiere decir:

Dado un espacio X, T_2, compacto y conexo con ≥ 2 puntos, existe algún $x \in X$ tal que $X - \{x\}$ es conexo.

Teorema 1.19. *(Caracterización de $\mathcal{C}$ y de $\mathcal{C} - \{0\}$) Sea X un espacio métrico que cumple estas dos propiedades:*

(1) X tiene subespacios abiertos compactos no vacíos, y todos ellos son homeomorfos.

(2) X tiene subespacios abiertos no compactos, y todos ellos son homeomorfos.

Entonces, si X es compacto es homeomorfo a $\mathcal{C}$, y si X no es compacto es homeomorfo a $\mathcal{C} - \{0\}$.

Demostración. Supongamos que X cumple el enunciado y es compacto. Por 1.11, basta comprobar que X es totalmente disconexo y no tiene puntos aislados. Si X tuviera puntos aislados, por (1) serían homeomorfos a X, y entonces al X tener un solo punto, X no cumpliría (2). Por tanto X no tendrá puntos aislados (en concreto, es infinito). Veamos ahora que X es totalmente disconexo.

Sean x, y dos puntos de X a distancia d. Entonces la unión de bolas $U = B(x, \frac{d}{3}) \cup B(y, \frac{d}{3})$, es claramente disconexa. Si U es compacto, y por tanto homeomorfo a X, entonces X es disconexo. Supongamos por el contrario que U no es compacto. Como todo $p \in X$ no es aislado, $X - \{p\}$ no es compacto. Por tanto, por (2), $X - \{p\}$ será homeomorfo a U, ergo disconexo. Como $X - \{p\}$ es disconexo $\forall p$, X será disconexo por el resultado enunciado antes del teorema.

En ambos casos, sabemos que X es disconexo. Ahora, dado un punto de X, sea C su componente conexa. Veamos que solo tiene un punto. C es cerrado. No puede ser abierto ya que entonces por (1) sería disconexo. Por tanto, $X - C$ no es compacto, ergo es homeomorfo a $X - \{x\}$. Ahora bien, por el lema 1.9, C es la quasicomponente de x en X. Por tanto para cada y en $X - C$, hay algún entorno clopen de y disjunto con C. Es decir, cada y de $X - C$ está en un abierto compacto de $X - C$. Al ser $X - C$ homeomorfo a $X - \{x\}$, cualquier y en $X - \{x\}$ está en un abierto compacto de $X - \{x\}$. Esto implica que X es totalmente disconexo, ya que cualquier par de puntos está separado por conjuntos clopen. Por tanto por 1.11 queda demostrado el caso con X compacto.

Supongamos ahora que X no es compacto. Por (1), tendrá algún subconjunto abierto compacto. Este subconjunto también cumplirá las propiedades (1) y (2), por tanto será homeomorfo a $\mathcal{C}$. De modo que X tiene un subconjunto abierto homeomorfo a $\mathcal{C} - \{0\}$, y por (2) hemos acabado. □

1.6 Homogeneidad de $\mathcal{C}$. Homogeneidad por numerables densos

Definición 1.20. Decimos que un espacio X es homogéneo si dados dos puntos suyos x, y, hay un homeomorfismo $f : X \to Y$ con $f(x) = y$.

Esto quiere decir que dos puntos cualesquiera del espacio son topológicamente indistinguibles. Una clase amplia de espacios homogéneos es la siguiente:

Definición 1.21. Un grupo topológico es una terna $(X, *, \mathcal{T})$, donde X es un conjunto, $(X, *)$ es un grupo, y $\mathcal{T}$ es una topología en X que cumple que las funciones $* : X \times X \to X; (x, y) \mapsto x*y$ y $\bullet^{-1} : X \to X; x \mapsto x^{-1}$ son continuas.

Ejemplo 1.22. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ son grupos topológicos con la suma.

$2^{\mathbb{N}}$ es un grupo topológico, definiendo la suma como $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, donde $a_n + b_n$ es la suma en $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, es decir, con 1+1=0. La función $\bullet^{-1}$ es la identidad en este caso, y es directo ver que la función $+$ es continua.

En un grupo topológico, la función $\bullet * y : x \mapsto x * y$ es continua, ya que se obtiene de componer las dos funciones continuas $x \mapsto (x, y) \mapsto x * y$. De modo que dados dos puntos x, y, las funciones $\bullet * x^{-1} * y$ y $\bullet * y^{-1} * x$ son continuas e inversas, de modo que son homeomorfismos que intercambian x e y. Esto demuestra la siguiente proposición:

Proposición 1.23. *Los grupos topológicos son homogéneos.* □

De modo que, en concreto, $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ y $\mathcal{C}$ serán todos homogéneos.

Igual que la homogeneidad nos dice cuando dos puntos cualesquiera de un conjunto son indistinguibles, podemos pensar en cuándo dos subconjuntos finitos (ordenados) cualesquiera de un conjunto son indistinguibles:

Definición 1.24. Decimos que un espacio X es fuertemente n-homogéneo cuando dados $x_1, \dots, x_n \in X$ distintos e $y_1, \dots, y_n \in X$ distintos, hay un homeomorfismo $f : X \to X$ con $f(x_i) = y_i$, para $i = 1, \dots, n$.

Por ejemplo, es fácil ver que $\mathbb{R}$ es fuertemente 2-homogéneo: dados $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, el homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \to y_1 + (x - x_1)\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cumple que $f(x_i) = y_i$. Sin embargo, $\mathbb{R}$ no es fuertemente 3-homogéneo. Esto se debe a que un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siempre es monótono, por tanto no podría cumplir que $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0$. Un resultado ligeramente sorprendente es que cualquier variedad conexa de dimensión ≥ 2 es fuertemente n-homogénea para todo n. Lo mismo pasa con el conjunto de Cantor:

Proposición 1.25. *$\mathcal{C}$ es fuertemente n-homogéneo para todo n.*

Demostración. Sean $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}$. Podemos encontrar conjuntos clopen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots, B_n$ entornos de $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}$ respectivamente de forma que $A_1, \dots, A_n$ son disjuntos, $B_1, \dots, B_n$ son disjuntos, y $A_0 = X - \bigcup_{i=1}^n A_i$ y $B_0 = X - \bigcup_{i=1}^n B_i$ son no vacíos.

Entonces, por 1.18, $A_0, A_1, \dots, A_n, B_0, B_1, \dots, B_n$ son todos conjuntos de Cantor, por tanto tenemos homeomorfismos $f_0 : A_0 \to B_0, f_1 : A_1 \to B_1, \dots, f_n : A_n \to B_n$. Al ser $A_1, \dots, A_n$ homogéneos, estos homeomorfismos f_i se pueden tomar de forma que $f_i(x_i) = y_i$ para $i = 1, \dots, n$. La función $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ definida por $f_0, f_1, \dots, f_n$ será un homeomorfismo por el lema del pegamiento. □

Un tipo de homogeneidad que, a priori, parece más restrictiva es la homogeneidad por numerables densos:

Definición 1.26. Dado un espacio X separable, decimos que X es homogéneo por numerables densos si dados dos subespacios D, E numerables densos de X, hay un homeomorfismo $f : X \to X$ con $f(D) = E$.

Esta propiedad quiere decir no solo que cualquier par de subespacios numerables densos son homeomorfos, sino que ese homeomorfismo puede extenderse a todo el espacio. Si hemos mencionado esta propiedad en este tema es lógicamente porque $\mathcal{C}$ es homogéneo por numerables densos. Este resultado puede encontrarse como el apartado e del ejercicio $4.3H$ en [En89]. Sin embargo, podemos dar una demostración esencialmente igual a la de 1.6. Para explicar la idea de la demostración, que está basada en [Eb77], hará falta algo de notación sobre $2^{\mathbb{N}}$:

Notación 1.27. Dado $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k) \in 2^{<\mathbb{N}}$, llamamos $\overline{\xi} \in 2^{\mathbb{N}}$ al resultado de completar ξ con ceros, $(\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots)$.
Llamaremos $\overline{2^{<\mathbb{N}}}$ al subconjunto de $2^{\mathbb{N}}$ formado por sus elementos con finitos elementos no nulos, es decir, las sucesiones que son 0 a partir de cierto punto.

En la demostración de 1.6 demostrábamos que si X es T_1, compacto, de base numerable, 0-dimensional y sin puntos aislados, entonces es homeomorfo a $\mathcal{C}$. Para ello hacíamos sucesivas particiones de X en 2^n subconjuntos clopen suyos (los I_ξ), y usábamos las particiones para construir un homeomorfismo $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$. Pues bien, resulta que con un pequeño cambio en el algoritmo de construcción de los I_ξ, podemos conseguir que $f(\overline{2^{<\mathbb{N}}})$ sea cualquier subconjunto numerable denso de $\mathcal{C}$ que queramos. Una vez probado esto, será directo que $\mathcal{C}$ es homogéneo por numerables densos.

Teorema 1.28. *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio topológico T_1, compacto, de base numerable, 0-dimensional y sin puntos aislados. Sea E un subconjunto numerable denso suyo. Entonces hay un homeomorfismo $f : 2^{\mathbb{N}} \to X$ con $f(\overline{2^{<\mathbb{N}}}) = E$.*

Demostración. La demostración es como la de 1.6, salvo un par de diferencias que explico a continuación.

Sea (e_n) una enumeración de E. Dado un subconjunto abierto A de X, denotamos $e(A)$ al primer elemento de la sucesión e_n que pertenece a A.

Al definir I_ξ para cada $\xi \in 2^{<\mathbb{N}}$, en la demostración original definíamos $I_{\xi\wedge(0)} = I_\xi \cap B_n$ e $I_{\xi\wedge(1)} = I_\xi - B_n$. En esta versión alterada, nos fijamos en dónde está $e(I_\xi)$. Si está en B_n, definimos $I_{\xi\wedge(0)} = I_\xi \cap B_n$ e $I_{\xi\wedge(1)} = I_\xi - B_n$, como antes. Si, por el contrario, $e(I_\xi) \notin B_n$, definimos $I_{\xi\wedge(0)} = I_\xi - B_n$ e $I_{\xi\wedge(1)} = I_\xi \cap B_n$. Mediante esta alteración, nos aseguraremos de que cada elemento $\overline{\xi}$ de $\overline{2^{<\mathbb{N}}}$ tenga de imagen $e(I_\xi)$.

El resto de la demostración de que f es un homeomorfismo es igual a la de 1.6: intercambiar $I_{\xi\wedge(0)}$ y $I_{\xi\wedge(1)}$ no tiene ningún efecto. Lo que queda ver es que $f(\overline{2^{<\mathbb{N}}}) = E$.

Dada $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k, 0, 0, \ldots) \in \overline{2^{<\mathbb{N}}}$, veamos que $f(\overline{\xi}) = e(I_\xi)$. $e(I_\xi)$ pertenece a I_ξ, y por cómo hemos construido $I_{\xi\wedge(0)}$, tendremos que $e(I_\xi) \in I_{\xi\wedge(0)}$. Por tanto al ser $I_{\xi\wedge(0)} \subseteq I_\xi$, $e(I_\xi)$ será el primer elemento de (e_n) que aparezca en $I_{\xi\wedge(0)}$, es decir, $e(I_\xi) = e(I_{\xi\wedge(0)})$. Continuando este proceso inductivo vemos que $e(I_\xi) \in I_{\xi\wedge(0\overset{n}{\ldots}0)}$ y $e(I_\xi) = e(I_{\xi\wedge(0\overset{n}{\ldots}0)})$ para cada n. Es decir, $e(I_\xi) \in I_{\overline{\xi}|_{k+n}}$ para todo n, por tanto $f(\overline{\xi}) = e(I_\xi)$. Esto ya nos da que $f(\overline{2^{<\mathbb{N}}}) \subseteq E$.

Veamos ahora que la imagen de $\overline{2^{<\mathbb{N}}}$ es todo E. Sea $e_n \in E$, con $a = (a_n) = f^{-1}(e_n) \in 2^{\mathbb{N}}$. Entonces, $e_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{a|_n}$. Por tanto para cierto N, $I_{a|_N}$ no contiene ninguno de los puntos e_i, con $i < n$. Por tanto $e_n = e(I_{a|_N})$. Por lo visto en el párrafo anterior, esto implica que $e_n = e(I_{a|_N}) = f(\overline{a|_N})$: es una imagen de un punto de $\overline{2^{<\mathbb{N}}}$. $\square$

Corolario 1.29. *$\mathcal{C}$ es homogéneo por numerables densos.*

Demostración. Dados D, E subespacios numerables densos de $\mathcal{C}$, por 1.28 hay homeomorfismos $f_1 : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}$ con $f_1(\overline{2^{<\mathbb{N}}}) = D$ y $f_2 : 2^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C}$ con $f_2(\overline{2^{<\mathbb{N}}}) = E$, ergo $f_2 \circ f_1^{-1} = f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es homeomorfismo y $f(D) = E$. $\square$

En el anexo A se puede ver una propiedad aún más fuerte de homogeneidad de $\mathcal{C}$ (original, que yo sepa).

Capítulo 2

El espacio de los irracionales, $\mathbb{I}$

No hay notación universalmente aceptada para el conjunto de los irracionales, pero aquí usaré $\mathbb{I}$. Obviamente consideramos $\mathbb{I}$ con su topología como subconjunto de $\mathbb{R}$. Al igual que con $\mathcal{C}$, en este capítulo vamos a estudiar algunas propiedades de $\mathbb{I}$ y caracterizarlo topológicamente, y estudiar sus subconjuntos, imágenes continuas y cocientes.

2.1 Propiedades de $\mathbb{I}$. Espacios completamente metrizables

Al igual que $\mathcal{C}$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{I}$ también va a ser homeomorfo a un producto, en este caso $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. En esta sección estudiamos las propiedades de $\mathbb{I}$ necesarias para caracterizarlo. El resultado principal de la sección, 2.6, es la implicación fácil del teorema 24.12 de [Wi70], y el camino seguido para demostrarlo es el mismo.

El espacio $\mathbb{I}$ es métrico. También es de base numerable y 0-dimensional: una base numerable de conjuntos clopen es $\{(a, b); a, b \in \mathbb{Q}\}$. Para caracterizar $\mathbb{I}$ nos faltan dos propiedades que enunciamos por separado.

Definición 2.1. Dado un espacio X y un punto suyo x, decimos que X *es localmente compacto en* x si x está en el interior de algún subespacio compacto de X.[1]

Los irracionales no van a ser localmente compactos en ningún punto. Intuitivamente, esto pasa porque los irracionales están 'llenos de agujeros' (los racionales). Lo probamos mediante esta proposición más general:

Proposición 2.2. *Sea X un espacio T_2, y sea $A \subseteq X$ tal que A y $X - A$ son densos en X. Entonces A no es localmente compacto en ningún punto.*

Demostración. Supongamos que hay un punto x en el interior de un compacto $C \subseteq A$. Es decir, hay un abierto U de X con $x \in U \cap A \subseteq C$. Como C es cerrado, $\overline{U \cap A} \subseteq C$. Pero $U \cap A$ es denso en U, por tanto $\overline{U \cap A} = \overline{U}$. Ergo, $U \subseteq \overline{U} = \overline{U \cap A} \subseteq C \subseteq A$, lo cual es imposible ya que $X - A$ es denso en X. $\square$

La otra propiedad tiene más que ver con los espacios métricos:

Definición 2.3. Una métrica d en X es completa si toda sucesión x_n de Cauchy en X converge a algún punto. Un espacio X es *completamente metrizable* si hay una métrica completa en X que genera su topología.

Si X es completamente metrizable por una distancia d y $f : Y \to X$ es homeomorfismo, entonces la métrica en Y dada por $d_Y(y_1, y_2) = d(f(y_1), f(y_2))$ genera la topología de Y y lo hace completamente metrizable. Es decir, ser completamente metrizable es una propiedad topológica. Un tratamiento bastante completo de estos espacios se encuentra en [Wi70] capítulo 24.

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es métrico completo con su métrica usual. Obviamente, la métrica habitual en $\mathbb{I}$ no lo hace un espacio métrico completo. Pero, sorprendentemente, $\mathbb{I}$ sí es completamente metrizable. Vamos a ver esto como consecuencia de un resultado bastante más general. Primero un lema:

[1] Muchas veces se usan otras definiciones de localmente compacto, pero todas coinciden con la dada en espacios T_2.

Lema 2.4. *Si X es completamente metrizable e Y es un subespacio abierto de X, Y es completamente metrizable.*

Demostración. Sea (X, d) completo e Y abierto en X. Podemos definir la función $g : Y \to \mathbb{R}^+; f(y) = d(y, X - Y)$, que será > 0 por ser Y abierto y continua ya que, por la desigualdad triangular, es lipschitz de constante 1. Por tanto la función $f(y) = \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{d(y,X-Y)}$ también será continua en Y.

Definimos en Y la métrica

$$d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2) + |f(y_1) - f(y_2)|$$

Nos bastará ver que d_Y es una métrica completa y genera la topología de Y.

Veamos que generan la misma topología comprobando que se conserva la convergencia de sucesiones y_n en Y a un punto $y \in Y$. Como $d < d_Y$, si $d_Y(y_n, y) \to 0$, obviamente $d(y_n, y) \to 0$. Por otra parte, si $d(y_n, y) \to 0$, al ser f continua en Y tenemos que $|f(y_n) - f(y)|$ tiende a 0, por tanto $d_Y(y_n, y) \to 0$.

Para ver que d_Y es completa, supongamos que tenemos una sucesión d_Y-Cauchy, (y_n). Esta sucesión también será d-Cauchy, por tanto convergerá a algún punto $x \in X$. Además, x tendrá que ser un punto de Y, ya que si no pasara esto, tendríamos que $f(y_n) \to \infty$. Esto es imposible porque $f(y_n)$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, ya que $|f(y_n) - f(y_m)| \leq d_Y(y_n, y_m)$. □

Definición 2.5. Sea Y subespacio de X. Decimos que Y es un G_δ en X si Y es la intersección de un conjunto numerable de abiertos de X.

Por ejemplo, en un espacio métrico cualquier subconjunto cerrado es G_δ, y en un espacio T_1 cualquier conjunto de complementario numerable es G_δ. Así que, en el caso concreto que nos interesa, $\mathbb{I}$ es un G_δ de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.6. *Sea X un espacio completamente metrizable y sea Y un G_δ de X. Entonces Y es completamente metrizable.*

Demostración. Llamamos Y_n a numerables abiertos de X que cumplen $Y = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Y_n$. Entonces por 2.4, habrá métricas d_n que generan la topología de Y_n y tales que (Y_n, d_n) es completo. Podemos suponer que d_n es ≤ 1, cambiándola si no por la distancia $\min(d_n, 1)$, que también es completa y genera la misma topología.

Consideramos en Y la métrica

$$d_Y(y_1, y_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i(y_1, y_2)}{2^i}$$

Nos bastará ver que d_Y es una métrica completa y genera la topología de Y.

La topología en Y como subespacio de X será la generada por la distancia d_1 (por ejemplo). Veamos que d_1 y d_Y generan la misma topología comprobando que se conserva la convergencia de sucesiones (y_n) en Y a un punto $y \in Y$. Si $d_Y(y_n, y) \to 0$, entonces $d_1(y_n, y) \to 0$, ya que $d_1 < 2d_Y$. Por otra parte, supongamos que $d_1(y_n, y) \to 0$, es decir, y_n converge a y en X. Entonces $d_i(y_n, y) \to 0$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Ahora, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar n tal que $\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, y habrá un $N > n$ tal que $\forall m > N, d_i(y_m, y) < \frac{1}{n \cdot 2^n}$ para $i = 1, \ldots, n$. De modo que $\forall m > N$,

$$d(y_m, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i(y_m, y)}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{d_i(y_m, y)}{2^i} \leq n\frac{1}{n \cdot 2^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq \frac{2}{2^n} \leq \varepsilon.$$

Veamos que d_Y es una métrica completa en Y. Como $d_n \leq 2^n d_Y$, si (y_n) es una sucesión d_Y-Cauchy, entonces es d_n-Cauchy para todo n, por tanto converge a un punto de Y_n, que llamaremos p_n. Por unicidad de límite de la sucesión (y_n) en X, todos los p_n son un mismo punto de X, p, que es el límite de y_n. Como p está en todos los Y_n, está en Y. □

Con esto ya hemos obtenido que $\mathbb{I}$ es completamente metrizable. Las demostraciones de 2.4 y 2.6 son constructivas, así que podemos dar explícitamente para los curiosos (como yo) una métrica completa en $\mathbb{I}$:

Proposición 2.7. *El espacio $\mathbb{I}$ es completamente metrizable. De hecho, si q_n es una enumeración de $\mathbb{Q}$, la métrica en $\mathbb{I}$ dada por*

$$d(i_1,i_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \min\left(1\ ,\ |i_1-i_2| + \left|\frac{1}{|i_1-q_n|} - \frac{1}{|i_2-q_n|}\right|\right)$$

es completa y genera la topología usual de $\mathbb{I}$. $\square$

2.2 Caracterización y homogeneidad de $\mathbb{I}$. El espacio de Baire, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

El siguiente teorema probará que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a $\mathbb{I}$ y la caracterización de $\mathbb{I}$, además de probar que $\mathbb{I}$ es homogéneo por numerables densos (1.26). La demostración está sacada de [Eb77]. Para enunciarlo recordamos algo de notación en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, análoga a la de $2^{\mathbb{N}}$ introducida en 1.2 y 1.27.

Notación 2.8. El espacio de Baire, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, es el espacio de las sucesiones de números naturales, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con la topología producto.
$\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ es el conjunto de sucesiones finitas de naturales, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_k)$, incluyendo la sucesión vacía, $()$.
Si $(a_n)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $a|_k$ será la sucesión de los primeros k términos de a: $a|_k = (a_1,\dots,a_k)\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.
Una base de la topología de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ viene dada por abiertos de la forma

$$B_\xi = \{(a_n)\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}; a_1=\xi_1,\dots,a_k=\xi_k\},\ \textit{para cada}\ \xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Es decir, B_ξ son las sucesiones que 'empiezan por ξ'.

Dado $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$, llamamos $\overline{\xi}\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ al resultado de completar ξ con ceros, $(\xi_1,\dots,\xi_k,0,0,\dots)$.

Llamaremos $\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ al subconjunto de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ formado por sus elementos con finitos elementos no nulos, es decir, las sucesiones que son 0 a partir de cierto punto.

Teorema 2.9. *Sea X espacio completamente metrizable, separable, 0-dimensional, no localmente compacto en ningún punto. Sea E subconjunto numerable denso de X. Entonces hay un homeomorfismo $h:\mathbb{N}^{\mathbb{N}}\to Y$ con $h(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}) = E$.*

La prueba va a ser muy similar a la del teorema 1.6: Para cada ξ en $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ de longitud n elegiremos un conjunto clopen I_ξ de diámetro $\leq \frac{1}{n}$, de forma que los I_ξ con ξ de longitud n serán una partición de X, y dado (a_n) en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $I_{a|_n}$ será una sucesión decreciente de subconjuntos de X de intersección un solo punto. Y entonces, nuestro homeomorfismo mandará (a_n) a esa intersección. Además habrá que añadir algún detalle para asegurar que en efecto, $h(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}})$ sea E, como en 1.29.

Los dos lemas siguientes reflejan cómo se usarán en la prueba las dos nuevas propiedades, compacidad local en ningún punto y completa metrizabilidad.

Lema 2.10. *Sea (X,d) un espacio métrico completo no compacto, separable, 0-dimensional. Entonces para cada $\varepsilon>0$ podemos encontrar una partición de X en infinito numerables conjuntos clopen no vacíos de diámetro $<\varepsilon$.*

Demostración. Por 1.13, X no será totalmente acotado. Por tanto hay $\varepsilon_1\leq\varepsilon$ tal que no hay recubrimiento finito de X con subconjuntos de diámetro $<\varepsilon$. Como X es separable y métrico es de base numerable, y por 1.5 podemos encontrar una base A_n de conjuntos clopen de diámetro $<\varepsilon_1$. Ahora, definimos $B_n = A_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$. Los B_n serán clopen, disjuntos, recubrirán X e infinitos de ellos serán no vacíos, probando así el lema. $\square$

Lema 2.11. *Sea X un espacio métrico completo, C_n una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos cuyos diámetros cumplen $diam(C_n)\to 0$. Entonces $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ tendrá exactamente 1 punto.*

Demostración. Está claro que la intersección no puede tener más de un punto, ya que $diam(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n)\leq diam(C_n)$ para cada n. Por otra parte, sea una sucesión (x_n) con $x_n\in C_n$. Entonces x_n es de Cauchy, y converge a cierto x en X. Como C_n es cerrado, tendremos $x\in C_n$ para todo n, por tanto $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$. $\square$

Demostración del teorema 2.9. Sea $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de E. Para cada subconjunto abierto A en X, llamaremos $e(A)$ al primer elemento de la sucesión (e_n) que pertenece a A. Vamos a definir subconjuntos clopen I_ξ de X, para cada $\xi \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, recursivamente según la longitud de ξ. En el caso base definimos $I_{()} = X$.

Ahora, sea ξ de longitud n y supongamos que ya hemos construido un conjunto clopen no vacío I_ξ. Vamos a construir $I_{\xi\wedge(i)}$ para $i \in \mathbb{N}$. I_ξ cumple las condiciones de 2.10, por tanto habrá una partición de I_ξ en numerables subconjuntos no vacíos clopen de diámetro $< \frac{1}{n+1}$ que serán nuestros $I_{\xi\wedge(i)}$. Los ordenamos de forma que $e(I_\xi)$ esté en $I_{\xi\wedge(0)}$.

Así construidos, los I_ξ tendrán estas propiedades:

(1) I_ξ es un conjunto clopen no vacío para todo $\xi \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$.

(2) Para todo n, $\{I_\xi; \xi \in \mathbb{N}^n\}$ es una partición de X en conjuntos clopen de diámetro $< \frac{1}{n}$.

(3) Para cada $(a_n) \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, $I_{a|_n}$ es una sucesión decreciente de cerrados cuya intersección tiene 1 punto.

(4) $\{I_\xi; \xi \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ es una base de abiertos de X.

Está claro que (1) y (2) se cumplen por inducción, mientras que en (3) para ver que la intersección es 1 punto basta usar el lema 2.11. (4) se cumple porque para cada punto x y para cada n, por (2) hay algún I_ξ de diámetro $< \frac{1}{n}$ que contiene a x.

El homeomorfismo que queremos construir es el siguiente:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N}^\mathbb{N} & \to & X; \\ & (a_n) & \mapsto & y \end{array}, \text{ donde } \{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a|_n}.$$

Por (3) f está bien definida, además cumple:

(5) Dado $x \in X$, $x = f((a_n))$, donde $a = (a_n)$ es la sucesión tal que $I_{a|_k}$ contiene a x para cada k.

La (a_n) de (5) se puede construir recursivamente, siendo a_n el único i tal que x está en $I_{a|_{n-1}\wedge(i)}$.

(5) deja claro que f es sobre. Es inyectiva ya que dadas $a = (a_n)$ y $b = (b_n)$ in $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ distintas, habrá k tal que $a|_k \neq b|_k$, por tanto por (2), $I_{a|_k}$ e $I_{b|_k}$ serán disjuntos. Por tanto $f(a) \neq f(b)$.

Para ver que f es homeo nos bastaría ver que $f(B_\xi) = I_\xi$ para todo $\xi \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, ya que $\{B_\xi\}_{\xi\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es una base de la topología de $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ (2.8) y por (4) $\{I_\xi\}_{\xi\in\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ es una base de la topología de X. Pero que $f(B_\xi) = I_\xi$ para todo ξ es directo por la definición de f y (5).

Veamos por último que $f(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}) = E$.

Dada $\overline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, 0, \dots) \in \overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$, veamos que $f(\overline{\xi}) = e(I_\xi)$. Está claro que $e(I_\xi)$ pertenece a I_ξ, y por cómo hemos construido los I_ξ, $e(I_\xi) \in I_{\xi\wedge(0)}$. Por tanto al ser $I_{\xi\wedge(0)} \subseteq I_\xi$, $e(I_\xi)$ será el primer elemento de (e_n) que aparezca en $I_{\xi\wedge(0)}$, es decir, $e(I_\xi) = e(I_{\xi\wedge(0)})$. Continuando este proceso inductivo vemos que $e(I_\xi) \in I_{\xi\wedge(0\overset{n}{\dots}0)}$ y $e(I_\xi) = e(I_{\xi\wedge(0\overset{n}{\dots}0)})$ para cada n. Es decir, $e(I_\xi) \in I_{\overline{\xi}|_{k+n}}$ para todo n, por tanto $f(\overline{\xi}) = e(I_\xi)$. Esto ya nos da que $f(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}) \subseteq E$.

Ahora dado $e_n \in E$, hay $\varepsilon > 0$ tal que $d(e_n, e_m) > \varepsilon$ para cada $m < n$. Por tanto, si cogemos ξ de longitud n tal que $e_n \in I_\xi$, $e_0, \dots, e_{n-1}$ no estarán en I_ξ. Por tanto, $e_n = e(I_\xi)$. Por lo visto en el párrafo anterior, esto implica que $e_n = f(\overline{\xi})$, ergo $E \subseteq f(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}})$. □

Corolario 2.12. *X es homeomorfo a $\mathbb{I}$ (y a $\mathbb{N}^\mathbb{N}$) si y solo si es un espacio completamente metrizable, separable, 0-dimensional, no localmente compacto en ningún punto.* □

Corolario 2.13. *$\mathbb{I}$ es homogéneo por numerables densos.*

Demostración. Dados D, E subespacios numerables densos de $\mathbb{I}$, por 2.9 hay homeomorfismos $f_1 : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{I}$ con $f_1(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}) = D$ y $f_2 : \mathbb{N}^\mathbb{N} \to \mathbb{I}$ con $f_2(\overline{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}) = E$, por tanto $f_2 \circ f_1^{-1} = f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ es homeomorfismo y $f(D) = E$. □

El corolario 2.13 es muy sorprendente a mi juicio, nos dice por ejemplo que hay un homeomorfismo $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ con $f(\pi + \mathbb{Q}) = \pi + \mathbb{A}$, siendo $\mathbb{A}$ el cierre algebraico de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, es decir, los números reales x tales que hay algún polinomio $p \in \mathbb{Q}[x]$ con $p(x) = 0$. En el anexo A vemos una propiedad aún más fuerte de homogeneidad de $\mathbb{I}$.

2.3 Fracciones continuas

En esta sección comento informalmente un tema curioso de mención obligada al hablar de $\mathbb{I}$ y $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: las fracciones continuas. Los detalles de esta construcción, que se pueden encontrar por ejemplo en el capítulo 10 de [Tr97], son muy tediosos, e incluirlos aquí sería irse por las ramas.

Dada una sucesión finita de k números naturales, $(a_1, a_2, \cdots a_k)$, que llamaremos *fracción continua de orden k*, le podemos asociar un número:

$$\theta(a_1, a_2, \cdots a_k) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}$$

De hecho, dada una sucesión de números naturales, $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la sucesión $\theta(a|_k) = \theta(a_1, a_2, \cdots a_k)$ siempre convergerá cuando k tiende a infinito, de forma que obtenemos un número asociado a a:

$$\theta(a) = \lim_{k\to\infty} \theta(a|_k) = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

Y resulta que este límite siempre va a ser un número irracional (a diferencia de las fracciones continuas de orden finito, que obviamente tendrán asociados números racionales).

Viendo este proceso en sentido contrario, si partimos de un número irracional $x > 1$, podemos obtener una fracción continua $a = (a_n)$ con $\theta(a) = x$. En efecto, de la ecuación

$$x = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}}$$

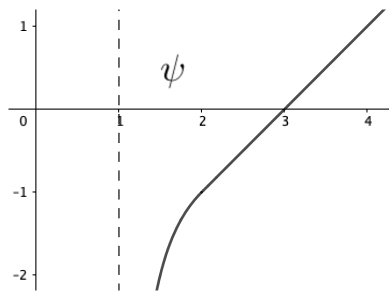
Obtenemos que $a_1 = \lfloor x \rfloor$, ya que el resto de la fracción continua es < 1. Operando, encontramos que

$$\frac{1}{x - a_1} = a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cdots}}$$

de modo que $a_2 = \left\lfloor \frac{1}{x-a_1} \right\rfloor$. Así se puede despejar recursivamente la fracción continua a partir de x.

En teoría de números, la fracciones continuas tienen importancia ya que la sucesión de fracciones continuas de un número x es 'la mejor sucesión de aproximaciones' a x mediante números racionales: si (a_n) es la fracción continua asociada a x, y llamamos $\theta(a|_k) = \frac{a_k}{b_k}$, entonces $\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ converge a x, pero además, para cada k $\frac{a_k}{b_k}$ es el número racional más cercano a x de entre los que tienen denominador $\leq b_k$. Más aún, $|b_k x - a_k|$ es el menor valor de $|bx - a|$ para cualquier fracción $\frac{a}{b}$ de denominador $\leq b_k$.

Volviendo al tema que nos ocupa, las fracciones continuas nos van a dar una biyección θ de las sucesiones de naturales, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, en $\mathbb{I} \cap (1, \infty)$. Lo sorprendente es que, como se ve en el capítulo 10 de [Tr97], θ es de hecho un homeomorfismo. Además, es fácil hallar un homeomorfismo explícito entre $\mathbb{I}$ y $\mathbb{I} \cap (1, \infty)$:



$$\psi : \mathbb{I} \cap (1, \infty) \to \mathbb{I}; x \to \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x \in (1, 2) \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

De modo que $\psi \circ \theta$ es un homeomorfismo 'explícito' de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ a $\mathbb{I}$.

2.4 Subespacios, imágenes y cocientes de $\mathbb{I}$. Espacios polacos y analíticos

Va a ser muy sencillo saber qué espacios son homeomorfos a algún subespacio de $\mathbb{I}$. Para ello, notamos primero que $2^{\mathbb{N}}$ es un subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. En efecto, es directo comprobar que la inclusión $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.

Proposición 2.14. *Un espacio X es homeomorfo a algún subconjunto de $\mathbb{I}$ si y solo si es T_0, de base numerable y 0-dimensional.*

Demostración. Por lo que acabamos de ver, $2^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Además, por el teorema 1.16, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es homeomorfo a un subespacio de $2^{\mathbb{N}}$. Por tanto, si X es homeomorfo a un subespacio de $2^{\mathbb{N}}$, será homeomorfo a uno de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, y viceversa. De modo que por 1.16 hemos acabado. $\square$

Pasamos a estudiar las imágenes de $\mathbb{I}$.

Definición 2.15. Un *espacio polaco* es un espacio completamente metrizable y separable.

Como veremos ahora, todos los espacios polacos son imágenes de $\mathbb{I}$. Sin embargo, el recíproco no es cierto, ni siquiera imponiendo condiciones de separación o numerabilidad: $\mathbb{Q}$ es una imagen continua de $\mathbb{I}$ y no es un espacio polaco (ya que se puede demostrar que todo espacio completamente metrizable no vacío sin puntos aislados tiene al menos $2^{\aleph_0}$ puntos). Para encontrar una función continua sobreyectiva $f : \mathbb{I} \to \mathbb{Q}$ basta, dados una enumeración q_n de $\mathbb{Q}$ y una partición C_n de $\mathbb{I}$ en infinitos clopens disjuntos, definir $f(C_n) = \{q_n\}$.

Teorema 2.16. *Si X es un espacio polaco, hay una función continua sobreyectiva $f : \mathbb{I} \to X$.*

Demostración. La demostración será análoga a la del teorema de Hausdorff-Alexandroff 1.12. Sea d una métrica completa en X.

Crearemos una familia de subconjuntos no vacíos de X, $\{F_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}$ de modo que:

(1) $F_{()} = X$

(2) $F_\xi = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_{\xi \wedge (n)}$

(3) Si ξ tiene longitud n, $\mathrm{diam}(F_\xi) < \frac{1}{n}$.

Para construirlo recursivamente vale darse cuenta de que como X tiene base numerable, F_ξ tiene base numerable para cada ξ de longitud n, por tanto es Lindelöf, ergo tiene un recubrimiento por numerables bolas de diámetro $< \frac{1}{n+1}$, que serán nuestros $F_{\xi \wedge (i)}$, con $i \in \mathbb{N}$.

Usando estas propiedades, es directo por inducción sobre n que los F_ξ, con ξ de longitud n, son un recubrimiento de X por subconjuntos de diámetro $< \frac{1}{n}$.

Ahora, dada una sucesión $s \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, le podemos asociar el único punto x_s de $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{F_{s|_n}}$ (este conjunto tiene un único punto por 2.11). Pasamos a definir la función f que buscamos:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} & \to & X; \\ & s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} & \mapsto & x_s \end{array}$$

Esta función es sobreyectiva, ya que dado x, podemos construir por recursión una sucesión $s = (s_n)$ tal que $x \in F_{s|_n}$ para todo n. Además es continua, ya que dada s y una bola $B(x_s, \frac{1}{n})$, tenemos que todas las sucesiones (a_n) con $a|_n = s|_n$ (un entorno de s en $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$), cumplirán que $f(a) \in B(x_s, \frac{1}{n})$. □

Aunque no podremos caracterizar las imágenes de $\mathbb{I}$ mediante propiedades sencillas como hemos hecho en otros casos, las imágenes métricas de $\mathbb{I}$ sí que son unos conjuntos muy estudiados en teoría descriptiva de conjuntos: se les conoce como conjuntos analíticos. Un estudio muy detallado de ellos, y de los espacios polacos en general, se encuentra en [Ke95].

Definición 2.17. Dado un espacio polaco X, decimos que un subconjunto $A \subseteq X$ es analítico si hay un espacio polaco Y y una función continua $f : Y \to X$ con $f(Y) = A$.

Teorema 2.18. *Dado un espacio métrico X no vacío, X es una imagen continua de $\mathbb{I}$ si y solo si es homeomorfo a un subconjunto analítico de un espacio polaco.*

Demostración. Si X es homeomorfo a un subconjunto analítico de un espacio polaco, entonces es la imagen continua de un espacio polaco. Como a su vez los espacios polacos son imágenes continuas de $\mathbb{I}$, tenemos esta implicación.

Recíprocamente, si X es una imagen continua de $\mathbb{I}$, podemos ver X como subespacio de su compleción $\overline{X}$, que es separable (por serlo X), por tanto es un espacio polaco. Al ser X imagen continua de $\mathbb{I}$, es un subconjunto analítico de $\overline{X}$. □

Pasando a los cocientes de $\mathbb{I}$, vamos demostrar que, de hecho, todas las imágenes continuas de los irracionales que sean espacios métricos son cocientes de los irracionales. Es decir, los cocientes métricos de los irracionales también serán salvo homeomorfismo los subespacios analíticos de espacios polacos. El teorema 2.20, y su demostración, están sacados de [MS69]. Para probarlo necesitaremos este lema:

Lema 2.19. *Si $X \neq 0$ es un espacio metrizable y separable, X tiene una métrica d y una base de abiertos no vacíos $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de forma que $diam(V_n) \to 0$ y cada $x \in X$ está en infinitos V_i distintos.*

Demostración. Comenzamos viendo que X es homeomorfo a un subespacio del cubo de Hilbert, $\mathcal{H}$, definido como el producto topológico $[0,1]^{\mathbb{N}}$ (esto se ve, por ejemplo, en 23.1 de [Wi70]).

Para ello, consideramos (e_n) sucesión densa en X, y una métrica $d_1 \leq 1$ en X, y consideramos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathcal{H}; \\ & x & \mapsto & (d_1(x, e_n))_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

f es continua ya que, si x_i tiende a x, entonces $d_1(x_i, e_n)$ tiende a $d_1(x, e_n)$ para todo n, por tanto $f(x_i)$ tiende a $f(x)$. Además es abierta sobre su imagen, ya que dada una bola $B := B(x, \varepsilon)$, y dado cierto e_n a distancia $< \frac{\varepsilon}{2}$ de x, entonces $f(B)$ contiene los elementos de $f(X)$ con coordenada enésima $< \frac{\varepsilon}{2}$, que es un abierto de la imagen que contiene a $f(x)$. Que f es inyectiva se deduce fácilmente de la desigualdad triangular y del hecho de que (e_n) es densa en X, osea que en efecto, f es un homeomorfismo sobre su imagen.

De modo que podemos suponer que X es un subconjunto de $\mathcal{H}$, que es metrizable compacto por ser producto numerable de metrizables compactos, y damos a X la métrica d heredada de la de $\mathcal{H}$. Ahora, como $\mathcal{H}$ es totalmente acotado, sea $\mathcal{U}_n$ un recubrimiento finito de $\mathcal{H}$ por abiertos de diámetro $< \frac{1}{n}$. Sea (U_n) una enumeración de $\cup_{i=1}^{\infty}\mathcal{U}_n$. Entonces, $\text{diam}(U_n) \to 0$ y cada $x \in \mathcal{C}$ está en infinitos U_i. Podemos obtener la base V_n del enunciado tomando $V_n = U_n \cap X$, y omitiendo los abiertos vacíos que queden en la sucesión. □

Teorema 2.20. *Si un espacio metrizable X es una imagen continua de $\mathbb{I}$, entonces X es un cociente de $\mathbb{I}$.*

Demostración. Como X es separable, le damos una métrica d y una base V_n como indica el lema anterior.

Nuestra estrategia consistirá en crear un subespacio Y del plano homeomorfo a $\mathbb{I}$ y una aplicación cociente $f : Y \to X$.

Sea $g : \mathbb{I} \to X$ una función continua de $\mathbb{I}$ sobre X. Definimos $Y_0 = \mathbb{I} \times \{0\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{Z}$, definimos $A_{nj} = g^{-1}(V_n) \cap \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right]$, e $Y_{nj} = A_{nj} \times \{\frac{1}{n}\}$.

Ahora, llamando $J_n = \{j; A_{nj} \neq \varnothing\}$, ya podemos definir Y:

$$Y = Y_0 \cup \bigcup \{Y_{nj}; n \in \mathbb{N}; j \in J_n\}$$

Por su definición, Y_0 y los Y_{nj} son todos disjuntos dos a dos, y que los Y_{nj} son clopen en Y. Sin embargo, los Y_{nj} son homeomorfos a los A_{nj}, subconjuntos abiertos no vacíos de $\mathbb{I}$, por tanto homeomorfos a $\mathbb{I}$. Por la misma razón, $g^{-1}(V_n)$ es homeomorfo a $\mathbb{I}$. Al ser Y_{nj} y $g^{-1}(V_n)$ homeomorfos, habrá una función continua sobreyectiva $f_{nj} : Y_{nj} \to V_n$.

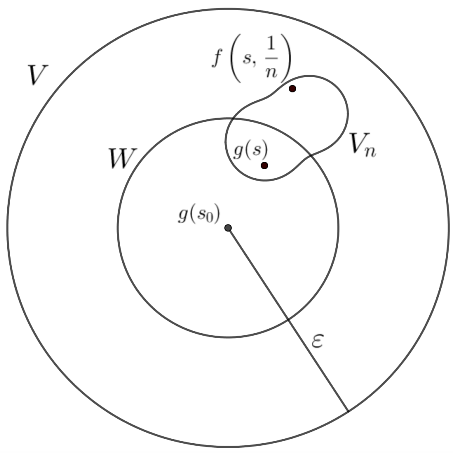
Definimos $f : Y \to X$ de forma que $f|_{Y_{nj}} = f_{nj}$ para $n \in \mathbb{N}, j \in J_n$, y en Y_0 definimos $f(s, 0) = g(s)$. Para demostrar el resultado tenemos que comprobar tres cosas:

- Y es homeomorfo a $\mathbb{I}$.

  Para comprobar esto, claro, usaremos el teorema 2.12. Y es separable, métrico y sin puntos aislados. Y no será localmente compacto en ningún punto: en puntos de los Y_{nj} es directo porque los Y_{nj} son clopens homeomorfos a $\mathbb{I}$, y un punto y de Y_0 no puede tener un entorno U compacto, ya que entonces $U \cap Y_0$, que es homeomorfo a un abierto de $\mathbb{I}$, sería compacto (por ser Y_0 cerrado en Y). Solo queda ver que Y admite una métrica completa. Pero $\mathbb{I}$ es completamente metrizable, por tanto $\mathbb{I} \times \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ también lo es. Además, Y es un G_δ en dicho conjunto, ya que se obtiene de quitarle un cerrado a cada $\mathbb{I} \times \left\{\frac{1}{n}\right\}$. Por tanto por 2.6 Y es completamente metrizable.

- f es continua.

  Lo comprobamos punto a punto. Es obvio en los puntos de los clopens Y_{nj}. Veamos en Y_0.
  Sea $(s_0, 0) \in Y_0$, y un entorno de su imagen, $V = B(g(s_0), \varepsilon) \subseteq X$. Sean $W = B\left(g(s_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y n_0 tal que $\operatorname{diam}(V_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, llamando $U = Y \cap \left(g^{-1}(W) \times \left[0, \frac{1}{n_0}\right]\right)$, vamos a comprobar que $f(U) \subseteq V$.
  Si $(s, 0) \in U$, entonces $f((s, 0)) \in W \subseteq V$. Por otra parte, si $\left(s, \frac{1}{n}\right) \in U$, entonces $f(s, 0)$ está en W y en V_n, y $f(s, \frac{1}{n})$ está en V_n. Por tanto, $d(f(s_0, 0), f\left(\left(s, \frac{1}{n}\right)\right)) \leq d(f(s_0, 0), f(s, 0)) + d(f(s, 0), f\left(\left(s, \frac{1}{n}\right)\right)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$. Es decir, $f\left(\left(s, \frac{1}{n}\right)\right) \in V$.



- f es una aplicación cociente.

  Sea $x \in X$ y sea U un entorno en Y de $f^{-1}(x)$. Entonces, cogiendo $y \in \mathbb{I}$ con $g(y) = x$, $(y, 0) \in U$, por tanto hay cierto $\varepsilon > 0$ con $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \times [0, \varepsilon] \subseteq U$. Sea ahora $N > \frac{1}{\varepsilon}$ tal que $x \in V_N$. Entonces hay un $Y_{N,j}$ contenido en $(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \times [0, \varepsilon]$, por tanto $V_N = f(Y_{N,j}) \subseteq f(U)$. Como V_N es un entorno de x, hemos acabado.

□

Capítulo 3

El espacio de los racionales, $\mathbb{Q}$

En este capítulo hablamos de la sorprendente caracterización de $\mathbb{Q}$: el teorema de Sierpinsky. Después obtenemos algunos resultados sobre subespacios de $\mathbb{Q}$, aprovechando que es 'tan solo' numerable, y un invariante topológico especialmente útil para distinguir subespacios de $\mathbb{Q}$. Por último caracterizamos las imágenes de $\mathbb{Q}$ y obtenemos algunos resultados sobre espacios que son cocientes de $\mathbb{Q}$.

3.1 El teorema de Sierpinski

Ya tenemos las herramientas necesarias para demostrar el teorema de Sierpinski, que caracteriza $\mathbb{Q}$. La siguiente demostración del resultado es similar a la de [Eb77], solo que aquí atajamos usando la homogeneidad por numerables densos de $2^{\mathbb{N}}$ (1.29) en vez de la de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (2.13).

Teorema 3.1 (Sierpinski)**.** *Sea $X \neq \varnothing$ un espacio metrizable numerable sin puntos aislados. Entonces X es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. En primer lugar, X es T_0. Además el conjunto $D = \{d(x,y); x,y \in X\}$ es numerable, por tanto hay una sucesión de números positivos $d_n \to 0$ cuyos elementos no están en D. De modo que $\{B(x,d_n); x \in X; n \in \mathbb{N}\}$ es una base numerable de conjuntos clopen de X. Por tanto por 1.16 podemos suponer que X es un subespacio de $2^{\mathbb{N}}$. Su cierre $\overline{X} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ será compacto, separable, 0-dimensional (por serlo $2^{\mathbb{N}}$) y sin puntos aislados (ya que X no los tiene). Así que por 1.6, $\overline{X}$ es homeomorfo a $2^{\mathbb{N}}$.

Así pues, X será homeomorfo a un subespacio numerable denso de $2^{\mathbb{N}}$. Por tanto, como por 1.29 todos los subespacios numerables densos de $2^{\mathbb{N}}$ son homeomorfos, tenemos que todos los espacios metrizables numerables sin puntos aislados son homeomorfos, concluyendo así la prueba, ya que $\mathbb{Q}$ cumple estas características. $\square$

Teorema 3.2. *Si X es un espacio metrizable separable sin puntos aislados y A es un subconjunto numerable denso de X, entonces A es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Para demostrarlo basta ver que A no tendrá ningún punto aislado. Dado un punto de a, por no ser aislado en X habrá una sucesión x_n de puntos distintos de a con $x_n \to a$. A su vez por ser A denso en X, habrá una sucesión a_n con $d(a_n, x_n) < d(a, x_n)$. Por tanto a_n son distintos de a y $a_n \to a$, es decir, A no tiene puntos aislados. $\square$

Lista de algunos espacios sorprendentemente homeomorfos a $\mathbb{Q}$

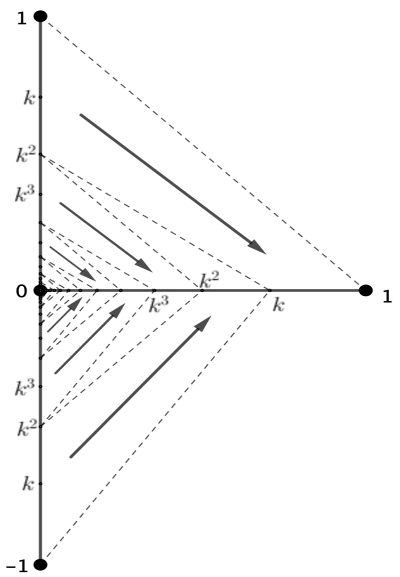
- El conjunto de extremos de intervalos de los C_n usados en la construcción del conjunto de Cantor (que es denso en $\mathcal{C}$). O en general cualquier subespacio numerable denso de $\mathcal{C}$.
- $\mathbb{Q}^2$, o en general $\mathbb{Q}^n$ con $n > 1$.
- $\mathbb{A}$, el conjunto de los números algebraicos, o cualquier otra extensión de cuerpos numerable de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$.
- $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. ¡los puntos de los extremos son indistinguibles del resto!

- El espacio $\mathbb{Q}[x]$ de los polinomios de coeficientes racionales, con métrica $d(p, q) = \max_{x\in[0,1]} |p(x)-q(x)|$.
- $\mathbb{Q}$ con la topología cuya base son los intervalos de la forma $[a, b)$, con $a, b \in \mathbb{Q}$, es de base numerable y regular, así que por el Teorema de Urysohn 0.1 es metrizable. Ergo al no tener puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.
- $\mathbb{Z}$ con la topología cuya base de clopens son las sucesiones aritméticas, $N_{(a,b)} = \{a + nb; n \in \mathbb{Z}\}$ con $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, también es regular, de base numerable y sin puntos aislados, así que es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

Todos estos espacios tienen algo en común: si antes de conocer el teorema de Sierpinski me hubieran preguntado si son homeomorfos a $\mathbb{Q}$, habría respondido: 'Seguro que no, veamos cómo demostrarlo'. De hecho, descubrí este teorema intentando demostrar con un compañero que $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ no es homeomorfo a $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$. El teorema indica que son homeomorfos, pero no se me ocurrió por entonces ningún homeomorfismo explícito. Sin embargo, tras ver la idea que se usa en las demostraciones de caracterizaciones de espacios 0-dimensionales, que consiste en dividir el conjunto en clopens y encontrar homeomorfismos entre dichos clopens (y así repetidas veces), no resulta difícil encontrar un homeomorfismo explícito entre los dos espacios. A continuación expongo uno original. En los próximos párrafos llamo $(a, b)_{\mathbb{Q}}$ a $\mathbb{Q} \cap (a, b)$.

Primero nos hace falta encontrar un homeomorfismo explícito $h : (a, b)_{\mathbb{Q}} \to (c, d)_{\mathbb{Q}}$, siendo $b > a$ y $d > c$ reales. Para ello basta encontrar sucesiones de racionales $a_n \to a$, $c_n \to c$ estrictamente decrecientes[1], y sucesiones de racionales $b_n \to b$ y $d_n \to d$ estrictamente crecientes. Podemos suponer $a_1 < b_1$ y $c_1 < d_1$, omitiendo algún elemento de la sucesión si no. Ahora simplemente definimos $h(a_n) = c_n$ y $h(b_n) = d_n$ y completamos h por interpolación lineal.

Por tanto valdrá con encontrar un homeomorfismo explícito $f : (-1, 1)_{\mathbb{Q}} \to [0, 1)_{\mathbb{Q}}$. Sea $k \in (0, 1)$ tal que k^n es irracional para todo n. Definiremos f a trozos. En $(k^2, 1)_{\mathbb{Q}}$, definimos f como un homeomorfismo entre $(k^2, 1)_{\mathbb{Q}}$ y $(k, 1)_{\mathbb{Q}}$. En $(-1, -k^2)_{\mathbb{Q}}$, lo definimos como un homeomorfismo entre $(-1, -k^2)_{\mathbb{Q}}$ y $(k^2, k)_{\mathbb{Q}}$. Continuamos este proceso definiendo f en $(k^{2n+2}, k^{2n})_{\mathbb{Q}}$ como un homeomorfismo sobre $(k^{2n+1}, k^{2n})_{\mathbb{Q}}$ y en $(-k^{2n}, -k^{2n+2})_{\mathbb{Q}}$ como un homeomorfismo sobre $(k^{2n+2}, k^{2n+1})_{\mathbb{Q}}$.



En la figura, donde $\mathbb{Q} \cap (-1, 1)$ aparece verticalmente y $[0, 1)_{\mathbb{Q}}$ horizontalmente, se muestra mediante flechas las imágenes de los intervalos por f. Por último, obviamente, definimos $f(0) = 0$.

Está claro que f es una biyección, y es continua en todo punto menos 0 ya que es continua en los intervalos de forma $(k^{2n+2}, k^{2n})_{\mathbb{Q}}$ y $(-k^{2n+2}, -k^{2n})_{\mathbb{Q}}$. De igual forma, f^{-1} es continua en todo punto menos 0 al ser continua en cada intervalo $(k^{n+1}, k^n)_{\mathbb{Q}}$. Además f y su inversa son continuas en 0, ya que para todo $x \in (-1, 1)_{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$, $k^2 < \frac{d(0,f(x))}{d(0,x)} < \frac{1}{k^2}$. Por tanto f es un homeomorfismo.

3.2 Subespacios de $\mathbb{Q}$: espacios numerables métricos

Usando el teorema de Sierpinski, es fácil probar una caracterización de los subespacios de $\mathbb{Q}$:

Teorema 3.3. *Un espacio topológico X es homeomorfo a algún subespacio de $\mathbb{Q}$ si y solo si es metrizable y numerable.*

Demostración. Una implicación es obvia. Para la otra, sea (X, d) un espacio métrico numerable. Consideramos el producto topológico $X \times \mathbb{Q}$. Este espacio es metrizable, numerable y sin puntos aislados, ya que $\mathbb{Q}$ no tiene puntos aislados. Por tanto por 3.1 $X \times \mathbb{Q}$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. De modo que como X es homeomorfo a $X \times \{0\}$, será homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{Q}$. □

[1]Una posible construcción explícita sería: si a es racional, elegimos $a_n = a - \frac{1}{n}$, y si a es irracional, elegimos a_n como el número con las primeras n cifras decimales no nulas de a.

En la prueba anterior, $X \times \{0\}$ es cerrado en $X \times \mathbb{Q}$. Esto demuestra el siguiente corolario:

Corolario 3.4. *Todo espacio X metrizable y numerable es homeomorfo a un subespacio cerrado de $\mathbb{Q}$.* □

En concreto, todo subespacio de $\mathbb{Q}$ es homeomorfo a algún subespacio cerrado de $\mathbb{Q}$. Esta propiedad es bastante especial, de hecho se me han ocurrido pocos espacios que la cumplan aparte de $\mathbb{Q}$, los espacios discretos y algunos ordinales como ω^2 con la topología de orden.

El objetivo inicial de esta sección era clasificar salvo homeomorfismo los subespacios de $\mathbb{Q}$. O lo que es lo mismo, clasificar los espacios numerables métricos. Sin embargo, estos espacios pueden llegar a ser muy complicados, y hay no numerables clases de ellos salvo homeomorfismo.

En el resto de la sección mostraremos no numerables de estas clases construidas explícitamente a partir de los ordinales numerables. Además, veremos que cada espacio numerable métrico es disperso (3.9) o la unión de un subespacio disperso y otro homeomorfo a $\mathbb{Q}$. Intuitivamente, esto quiere decir que si partimos de un espacio numerable métrico X y comenzamos a quitarle puntos aislados uno a uno, eventualmente X quedará vacío o nos quedará un subespacio de X homeomorfo a $\mathbb{Q}$ (al que obviamente ya no podremos quitarle puntos aislados). El desarrollo de la sección es en parte original, basado en mi solución al problema 13E de [Wi70]. Además, parte de la notación está sacada de [Gi05], y la idea del teorema 3.10 es esencialmente la misma que la del teorema de Cantor Bendixon 6.4 en [Ke95].

Como motivación de las construcciones que vamos a hacer mostramos algunos subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Llamo $a + bX = \{a + bx; x \in X\}$.

$$\begin{array}{rcl}
M_0 & = & \{0\} \\
M_1 & = & \{0\} \cup \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty} \\
M_2 & = & \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{M_1}{2^{n+1}}\right\} \\
M_3 & = & \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{M_2}{2^{n+1}}\right\} \\
\vdots & & \\
M_k & = & \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{M_{k-1}}{2^{n+1}}\right\}
\end{array}$$

Es decir, M_1 es una sucesión que tiende a 0, M_2 es una 'sucesión de sucesiones que tiende a 0', M_3 es una 'sucesión de sucesiones de sucesiones que tiende a 0', etc. No hay ninguna razón para detenerse en los naturales:

Definición 3.5. Para cada ordinal numerable α, definimos M_α recursivamente de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{rcl}
M_0 & = & \{0\} \\
M_{\alpha+1} & = & \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{M_\alpha}{2^{n+1}}\right\} \\
M_\alpha & = & \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{M_{\beta_n}}{2^{n+1}}\right\} \textit{si } \alpha \textit{ es ordinal límite, siendo } \beta_n \textit{ una enumeración de } \alpha.
\end{array}\right.$$

Es directo por inducción que M_α será un subconjunto compacto de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$. Además, vamos a ver que si α y β son distintos, M_α y M_β no son homeomorfos. Para ello introducimos el concepto de la derivada de Cantor-Bendixon.

Dado un espacio X, llamamos $X^{(1)}$ a $\{x \in X;\ x$ es punto de acumulación de $X\}$. Por ejemplo, $M_1^{(1)} = M_0$, $M_2^{(1)} = M_1$, $M_3^{(1)} = M_2$, $\mathbb{Q}^{(1)} = \mathbb{Q}$ y $X^{(1)} = \varnothing$ sii X es discreto. Es fácil ver que $X^{(1)}$ es cerrado en X, y que si X e Y son espacios homeomorfos, entonces $X^{(1)}$ e $Y^{(1)}$ también lo son.

El concepto de conjunto derivado se puede llevar más allá: podemos pensar en el derivado del derivado de un conjunto, etc. Formalizamos estos conceptos:

Definición 3.6. Dado un espacio X, definimos su α-ésimo derivado de Cantor-Bendixon $X^{(\alpha)}$ para cada ordinal α por inducción de la siguiente manera:

$$\begin{cases} X^{(0)} & = & X \\ X^{(\alpha+1)} & = & \left(X^{(\alpha)}\right)^{(1)} \\ X^{(\alpha)} & = & \bigcap_{\beta<\alpha} X^{(\beta)} \text{ Si } \alpha \text{ es ordinal límite.} \end{cases}$$

Está claro que para cada X, X^{α} es decreciente, es decir, X^{β} está contenido en X^{α} si $\beta > \alpha$. Además, si X e Y son homeomorfos, entonces es directo por inducción que X^{α} es homeomorfo a Y^{α} para todo ordinal α. Otra propiedad directa por inducción es que si Y es un subespacio abierto de X, entonces $Y^{\alpha} = Y \cap X^{\alpha}$.

Si X es un espacio numerable, entonces para algún ordinal numerable se cumplirá que $X^{\alpha} = X^{\alpha+1}$, ya que en caso contrario tendríamos para cada α ordinal numerable un punto $x_{\alpha} \in X^{\alpha+1} - X^{\alpha}$, por tanto X sería no numerable. De igual forma se puede ver que para cualquier X, hay un ordinal α de cardinal $\leq |X|$ tal que $X^{\alpha} = X^{\alpha+1}$. Llamamos $N(X)$, el *rango de Cantor-Bendixon de* X, al menor ordinal que cumple esto, es decir, el menor ordinal tal que $X^{N(X)}$ no tiene puntos aislados. Claramente, se cumplirá que $X^{(\alpha)} = X^{(N(X))}$ si $\alpha > N(X)$. Si X, Y son homeomorfos por $f : X \to Y$, como $f(X^{\alpha}) = Y^{\alpha}$ para cada α, tendremos que $N(X)$ es homeomorfo a $N(Y)$. Diremos también que un punto x está α-aislado si $x \in X^{(\alpha)} - X^{(\alpha+1)}$. Por ejemplo, los puntos 0-aislados son los puntos aislados a secas, y 0 es un punto 1-aislado de M_1. La proposición siguiente demostrará que los M_{α} no son homeomorfos entre sí:

Proposición 3.7. *$M_{\alpha}^{(\alpha)} = \{0\}$. Por tanto, $N(M_{\alpha}) = \alpha + 1$ para todo α.*

Demostración. Por supuesto, tenemos que usar inducción en α. El caso 0 se cumple. Veamos el caso límite primero.

Si α es un ordinal límite, M_{α} está formado por copias de M_{β_n} para $\beta_n < \alpha$, que llamaremos $A_{\beta_n} = \frac{1}{2^n} + \frac{M_{\beta_n}}{2^{n+1}}$. A_{β_n} está contenido en $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right]$, por tanto es clopen en M_{α} al estar a distancia positiva de $M_{\alpha} \setminus A_{\beta_n}$. Por tanto, por hipótesis de inducción, en $M_{\alpha}^{(\beta_n)}$ solo habrá un punto de A_{β_n}, que será $\frac{1}{2^n}$.

Esto implica que $M_{\alpha}^{(\alpha)}$ no puede tener puntos aparte de 0, ya que para cada $\beta < \alpha$, $M_{\alpha}^{(\alpha)}$ no contendrá ningún punto de A_{β}. Además, para cada $\beta < \alpha$, hay infinitos ordinales β_n con $\beta < \beta_n < \alpha$, y esos ordinales cumplirán que $M_{\alpha}^{(\beta)}$ tiene puntos en A_{β_n}. Como $M_{\alpha}^{(\beta)}$ tiene puntos en infinitos intervalos de forma $\left[\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^{n+1}}\right]$ y es cerrado, tendremos que $0 \in M_{\alpha}^{(\beta)}$. Como esto se cumple para todo $\beta < \alpha$, $0 \in M_{\alpha}^{(\alpha)}$.

Pasamos al caso sucesor. Supongamos que $M_{\alpha}^{(\alpha)} = \{0\}$. $M_{\alpha+1}$ está formada por numerables copias homeomorfas de M_{α} que son clopen (como los A_{β_n} de antes) y por el 0. Por tanto $M_{\alpha+1}^{(\alpha)}$ contendrá solo los ceros de las copias de M_{α}, es decir, los puntos $\frac{1}{2^n}$, y el 0, ya que $M_{\alpha+1}^{(\alpha)}$ es cerrado. Ergo, $M_{\alpha+1}^{(\alpha+1)} = \left(M_{\alpha+1}^{(\alpha)}\right)^{(1)} = \{0\}$.

Sabiendo que $M_{\alpha}^{(\alpha)} = \{0\}$, está claro que $M_{\alpha}^{(\alpha+1)} = \varnothing$, por tanto $N(M_{\alpha}) = \alpha + 1$. □

De modo que los M_{α} tienen todos rangos de Cantor-Bendixon distintos, así que no podrán ser homeomorfos entre sí. Por tanto habríamos encontrado $\aleph_1$ espacios numerables métricos topológicamente distintos. De hecho, se pueden encontrar $2^{\aleph_0}$ (véase el anexo B). Además, por lo visto en la demostración anterior está claro que $N(M_{\alpha} - \{0\}) = \alpha$, por tanto para cada ordinal numerable α habrá un espacio X con $N(X) = \alpha$.

Proposición 3.8. *Si X es numerable y métrico, entonces $X^{(N(X))}$ es $\varnothing$ u homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. $X^{(N(X))}$ es métrico y sin puntos aislados. Por tanto si no es vacío, tendrá infinitos puntos. Al ser numerable, métrico y sin puntos aislados, será homeomorfo a $\mathbb{Q}$. □

Es fácil caracterizar los espacios X tales que $X^{(N(X))} = \varnothing$:

Proposición 3.9. *$X^{(N(X))} = \varnothing$ si y solo si X es disperso, es decir, todo subconjunto no vacío de X tiene puntos aislados.*

Demostración. Si X es disperso, como $X^{(N(X))}$ es un subconjunto de X sin puntos aislados, tendrá que ser $\varnothing$. Recíprocamente, supongamos $X^{(N(X))} = \varnothing$, y sea A un subconjunto no vacío de X. Si A no tuviera puntos aislados, entonces vemos por inducción que $A \subseteq X^{(\alpha)}$ para todo α, por tanto $A \subseteq X^{(N(X))} = \varnothing$, absurdo. □

Ya podemos expresar el hecho que queríamos sobre los espacios numerables métricos:

Proposición 3.10. *Si X es numerable métrico, entonces es disperso o es unión de un subespacio disperso y un subespacio homeomorfo a $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Si $X^{(N(X))} = \varnothing$, X es disperso por 3.9.

Si no, por 3.8 $X^{(N(X))}$ será homeomorfo a $\mathbb{Q}$. Como $X^{(N(X))}$ es cerrado en X, tendremos que $Y := X - X^{(N(X))}$ es abierto, por tanto $Y^{(N(X))} = Y \cap X^{(N(X))} = \emptyset$. Por tanto por 3.9, Y será disperso. □

Un estudio mucho más detallado de los espacios numerables métricos se puede encontrar en [Gi05].

3.3 Imágenes continuas y cocientes de $\mathbb{Q}$. Espacios secuenciales

$\mathbb{Q}$ es un espacio numerable, y a su vez es una unión numerable de subconjuntos clopens disjuntos, por tanto el siguiente teorema es directo:

Teorema 3.11. *Un espacio X es una imagen continua de $\mathbb{Q}$ si y solo si es finito ($\neq \varnothing$) o infinito numerable.*

Demostración. Si X es infinito, sea x_n una enumeración de x. Elegimos una partición de $\mathbb{Q}$ en clopens, por ejemplo $U_n = (\pi + n, \pi + n + 1)$, con $n \in \mathbb{Z}$, y definimos $f : \mathbb{Q} \to X$ de forma que $f(U_n) = \{x_n\}$.
Si X es finito, hacemos lo mismo con una partición finita de $\mathbb{Q}$ en clopens. □

Los cocientes no nos lo van a poner tan fácil. No parece haber una caracterización basada en propiedades sencillas, pero sí podemos dar algunas condiciones necesarias y algunas suficientes para que un espacio X sea homeomorfo a algún cociente de $\mathbb{Q}$. Los axiomas de separación no serán de mucha utilidad: Hay cocientes de $\mathbb{Q}$ que no son T_0 (por ejemplo, $\mathbb{N}$ con la topología trivial o la topología del complemento finito [2]), y hay espacios numerables T_4 que no son cocientes de $\mathbb{Q}$ (uno de ellos sería el ejemplo 1.6.20 de [En89], que no es secuencial, lo cual, como veremos, implica que no es cociente de $\mathbb{Q}$).

La única condición necesaria para ser cociente de $\mathbb{Q}$ que he conseguido encontrar es un axioma de numerabilidad muy débil, que a continuación estudio siguiendo parte del artículo [Fr65].

Definiciones 3.12. Dado un espacio X y un subespacio suyo A, decimos que A es secuencialmente abierto en X si dado un punto a de A y una sucesión x_n en X que converge a A, entonces hay un natural N tal que $x_m \in A$ si $m > N$.
Decimos que un espacio X es secuencial si todo abierto secuencial de X es abierto.

Es decir, como cualquier subespacio abierto es abierto secuencial, los espacios secuenciales son aquellos en que los subespacios abiertos son exactamente los abiertos secuenciales. Por ejemplo, es directo ver que los espacios donde cada punto tiene una base numerable de entornos (p. ej. $\mathbb{Q}$) son secuenciales. La implicación recíproca, sin embargo, no es cierta: el cociente de $\mathbb{R}$ obtenido al colapsar $\mathbb{Z}$ a un solo punto es secuencial (por la proposición que veremos a continuación) pero se puede comprobar que su punto asociado a $\mathbb{Z}$ no tiene base numerable de entornos.

Proposición 3.13. *Si $q : X \to Y$ es una aplicación cociente y X es secuencial, Y es secuencial.*

Demostración. Sea A un abierto secuencial de Y, veamos que es abierto. Para ello nos basta ver que $q^{-1}(A)$ es abierto en X. A su vez, para ello basta ver que $q^{-1}(A)$ es abierto secuencial en X. Pero, dado $x \in q^{-1}(A)$ y $x_n \in X$ una sucesión que tiende a x, entonces $q(x_n)$ tiende a $q(x) \in A$. Por tanto $q(x_n)$ está en A a partir de cierto N. Por tanto, x_n estará en $q^{-1}(A)$ para $n > N$, completando el argumento. □

[2] Una forma de obtener un conjunto numerable con la topología trivial como cociente de $\mathbb{Q}$ es considerar una partición de $\mathbb{Q}$ en infinitos conjuntos U_n densos en $\mathbb{Q}$. Al colapsar cada U_n a un punto, el cociente que obtenemos tendrá la topología trivial. Para obtener la topología del complemento finito, hacemos algo similar solo que ahora los U_n de la partición serán finitos y de forma que cualquier unión numerable de ellos sea densa en $\mathbb{Q}$.

Como $\mathbb{Q}$ es secuencial, ya tenemos la condición necesaria para ser un cociente de $\mathbb{Q}$:

Corolario 3.14. *Si $\mathbb{Q} \to Y$ es una aplicación cociente, Y es secuencial.* □

De hecho, la secuencialidad está muy relacionada con los cocientes. Una construcción adecuada nos permitirá expresar cualquier espacio secuencial como cociente de un espacio métrico:

Proposición 3.15. *Todo espacio secuencial es un cociente de un espacio métrico.*

Demostración. Sea X secuencial. Para cada $x \in X$ y cada sucesión $s = \{s_n\}$ en X convergente a x, consideramos $S(s,x) = \{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{x\}$, con la topología que cumple que $\{s_n\}$ es abierto para todo n y $s_n \to x$ (los entornos de x serán los subespacios que contienen a x y tienen complemento finito). Claramente $S(s,x)$ es métrico, ya que será homeomorfo a $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ o a un espacio discreto finito. Ahora, sea T el coproducto topológico de todos los posibles $S(s,x)$. T es un coproducto de espacios métricos, por tanto es metrizable.

Cada punto de T proviene de algún punto de X, lo cual da lugar a una función $f : T \to X$, que es sobreyectiva ya que para cada $x \in X$, la sucesión constante x de límite x está en T. f es continua, ya que su restricción a cada $S(s,x)$ lo es (para comprobar esto basta usar que cada abierto de X que contiene a x contiene a todos los s_n salvo finitos). Usaremos que X es secuencial para ver que f es una aplicación cociente. Sea $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(U)$ es abierto en T. Entonces, dado x en U y una sucesión $s_n \to x$, $f^{-1}(U)$ contendrá todos los puntos de $S(s,x)$ salvo finitos, por tanto U contendrá todos los s_n para n suficientemente grande. Es decir, U es secuencialmente abierto, por tanto es abierto. Por tanto f es cociente, y hemos acabado. □

Esto nos da una caracterización muy sencilla de los espacios secuenciales.

Teorema 3.16. *Las siguientes son equivalentes:*

1) X es secuencial.

2) X es un cociente de un espacio con 1^{er} axioma de numerabilidad.

3) X es un cociente de un espacio métrico completo localmente compacto y 0-dimensional.

Demostración. El espacio T de la prueba de 3.15 es claramente completamente metrizable, localmente compacto y 0-dimensional, por tanto $1 \Rightarrow 3$. Además, $3 \Rightarrow 2$ es obvio y 3.13 prueba que $2 \Rightarrow 1$. □

Volviendo a los cocientes de los racionales, estos siempre serán secuenciales, pero la implicación recíproca no tiene por qué cumplirse. En [SW76] se muestra un ejemplo de un espacio numerable secuencial que no es cociente de ningún espacio métrico de cardinal $< 2^{\aleph_0}$. Sin embargo, sí podemos encontrar algunas condiciones suficientes más fuertes para que un espacio numerable X sea cociente de $\mathbb{Q}$:

Proposición 3.17. *Si $X \neq \varnothing$ es un espacio métrico finito o infinito numerable, es un cociente de $\mathbb{Q}$.*

Demostración. El espacio $X \times \mathbb{Q}$ es metrizable, numerable y sin puntos aislados, por tanto homeomorfo a $\mathbb{Q}$. Además, la proyección $(x,q) \mapsto x$ de $X \times \mathbb{Q}$ sobre X es abierta, por tanto es un cociente. □

Se puede obtener un resultado un poco más fuerte. El siguiente resultado y su demostración son originales (que yo sepa), aunque la idea de crear espacios a partir de secuencias está inspirada en 1.12 de [Fr65].

Teorema 3.18. *Si $X \neq \varnothing$ es finito o infinito numerable y cumple el primer axioma de numerabilidad, entonces es un cociente de $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Por la proposición anterior, nos bastará demostrar que X es cociente de un espacio métrico numerable. Sea (x_n) una enumeración (finita o infinita) de X, y para cada x_n sea $(A_{n,k})_{k=2,3,\ldots}$ una base de entornos de x_n de forma que $A_{n,k+1} \subseteq A_{n,k}$.

Nuestro cociente será $f : T \to X$, donde T es numerable métrico. Vamos a ver cómo construirlo. Llamaremos T_n a $f^{-1}(x_n)$ para cada n, de forma que los T_n serán no vacíos y $T = \cup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. T será un subespacio del espacio de las sucesiones de reales con finitos términos no nulos, con métrica $d(a,b) = \max\{|b_n - a_n|\}$. El siguiente párrafo intenta motivar la construcción de T.

Llamamos $e_n = (0, 0, \ldots, 0, \overset{n}{1}, 0, \ldots)$ al enésimo vector unitario. Entonces, tendremos que $e_n \in T_n$, es decir, $f(e_n) = x_n$. Ahora bien, nuestro cociente tendrá que cumplir que la imagen de cualquier entorno de T_n sea un entorno de x_n, y para ello nos bastará que la imagen de cualquier bola centrada en e_n sea un entorno de x_n. En concreto, podemos pedir $f\left(B\left(e_n, \frac{1}{k}\right)\right) = A_{n,k}$. Para conseguir esto, necesitamos que para cada punto x_m en $A_{n,k}$ haya algún punto de T_m en $B\left(e_n, \frac{1}{k}\right)$. Esto se puede conseguir añadiendo a T_m el punto $e_n + \frac{e_m}{k+1}$, que está en $B\left(e_n, \frac{1}{k}\right)$.

Tras hacer esto para todos los x_n, obtenemos que en cada conjunto T_n está el propio punto e_n, y además los puntos $e_m + \frac{e_n}{k+1}$, cuando x_n esté en $A_{m,k}$. Es decir,

$$T_n = \{e_n\} \cup \left\{e_m + \frac{e_n}{k+1}; m \neq n \text{ y } x_n \in A_{m,k}\right\}.$$

Ahora, como decíamos, sea $T = \cup_n T_n$ y la función $f : T \to X$ de forma que $f(T_n) = \{x_n\}$. Como $f(e_n) = x_n$, f es sobreyectiva. Vamos a comprobar que f es un cociente usando las siguientes propiedades:

(1) Todos los puntos de T son aislados excepto posiblemente los e_n.

Ya que dado otro punto $p = e_n + \frac{e_m}{k}$, cualquier otro punto distinto $q = e_a + le_b$ cumplirá o bien que $n \neq a$, en cuyo caso la coordenada enésima de q es $\leq \frac{1}{3}$, y por tanto $d(p,q) \geq \frac{2}{3}$, o bien $n = a$ pero $m \neq b$, en cuyo caso $d(p,q) \geq \frac{1}{k}$, o bien $n = a, m = b$ pero $l \neq \frac{1}{k}$, en cuyo caso $d(p,q) \geq \left|\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right|$. Por tanto para cualquier otro punto q, $d(p,q) \geq \frac{1}{k(k+1)}$, es decir, p es aislado.

(2) $f\left(B\left(e_n, \frac{1}{k}\right)\right) = A_{n,k}$.

Sabemos por construcción que $A_{n,k} \subseteq f\left(B\left(e_n, \frac{1}{k}\right)\right)$. Recíprocamente, si $a \in B\left(e_n, \frac{1}{k}\right)$, entonces a será de la forma $e_n + l \cdot e_m$, donde l es 0 o $\frac{1}{N+1}$, con $N \geq k$. Por tanto o bien $a = e_n$, y $f(a) \in A_{n,k}$, o $a = e_n + \frac{e_m}{N+1} \in T_m$, en cuyo caso $x_m \in A_{n,N} \subseteq A_{n,k}$.

Comprobemos la continuidad de f punto a punto. En todos los puntos salvo los e_n, f es continua ya que por (1) son aislados. f será continua en e_n ya que si U es un entorno de $f(e_n) = x_n$, habrá algún $A_{n,k}$ contenido en U, por tanto por (2), el entorno $B(e_n, \frac{1}{k})$ de e_n estará contenido en $f^{-1}(U)$.

Ahora, sea $U \subseteq X$ y supongamos que $f^{-1}(U)$ es abierto en T. Entonces, dado $x_n \in U$, $f^{-1}(U)$ contiene $B(e_n, \frac{1}{k})$ para algún k. Por (2), U contiene el entorno $A_{n,k}$ de x_n. Es decir, U es abierto, ergo f es cociente. □

Nótese que este último teorema no asume ningún axioma de separación, por tanto es más fuerte que el anterior. De hecho, es otra forma de demostrar que un conjunto numerable con la topología trivial o con la topología del complemento finito es un cociente de $\mathbb{Q}$, o también que cualquier espacio topológico finito es un cociente de $\mathbb{Q}$.

En el caso de $\mathbb{Q}$, no vamos a dedicar una sección a estudiar su homogeneidad. Por una parte, $\mathbb{Q}$ va a ser fuertemente n-homogéneo para todo $\mathbb{N}$. Esto se puede demostrar igual que hemos hecho con $\mathcal{C}$ en 1.25, usando que $\mathbb{Q}$ es 0-dimensional y todo clopen de $\mathbb{Q}$ es homeomorfo a $\mathbb{Q}$. Pero $\mathbb{Q}$ no es homogeneo por numerables densos, ya que tiene subespacios numerables densos que no son el espacio total. De todas formas, en el anexo A vemos que $\mathbb{Q}$ cumple otra propiedad parecida a la homogeneidad por numerables densos.

Capítulo 4

La recta real, $\mathbb{R}$, y el intervalo [0,1], I

En la primera sección del capítulo estudiamos la relación entre las topologías del orden y de subespacio en subespacios de $\mathbb{R}$, y comprobamos que $\mathbb{R}$ es homogéneo por numerables densos. En la segunda, estudiamos los continuos, una clase de espacios con propiedades interesantes de conexión y que nos permitirán tanto caracterizar $\mathbf{I} = [0,1]$ como estudiar las imágenes de $\mathbf{I}$ y $\mathbb{R}$ en el tema siguiente.

4.1 Topología del orden en subconjuntos de $\mathbb{R}$

Comenzamos estudiando la topología del orden en subconjuntos de $\mathbb{R}$, dada por el orden usual de $\mathbb{R}$. Esto, además de tener su propio interés, nos será útil al caracterizar $\mathbf{I}$. El teorema 4.2 es la proposición 1 de [Fr12].

Definición 4.1. Dado $(X, <)$ totalmente ordenado, su *topología del orden* es la que tiene por base los conjuntos de la forma $(a,b)_X = \{x \in X; a < x < b\}$, $(a,\infty)_X = \{x \in X; a < x\}$ y $(-\infty, b)_X = \{x \in X; x < b\}$[1].

Al estar definida esta topología en base al orden, cualquier isomorfismo de orden (función biyectiva creciente) entre dos conjuntos linealmente ordenados será un homeomorfismo entre sus topologías del orden. También usaremos en 4.15 que estas topologías son T_2. Esto se cumple ya que dados $x, y \in X$ con $x < y$, si hay algún elemento c en $(x,y)_X$, entonces $(-\infty, c)$ y (c, ∞) separan x de y. Si, por el contrario, no existe tal c, entonces $(-\infty, y)$ y (x, ∞) separan x e y. De hecho, aunque no lo probaremos aquí, todas las topologías del orden son normales.

En muchos subconjuntos de $\mathbb{R}$, la topología del orden coincide con la topología de subespacio. Ejemplos de estos espacios son, por lo que veremos, $\mathbb{R}$, $\mathbf{I}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ y $\mathcal{C}$. Sin embargo, en otras ocasiones no coinciden las dos topologías. Por ejemplo, si consideramos $A = \{0\} \cup (1,2)$, en su topología como subespacio el 0 es un punto aislado, sin embargo en la topología del orden no lo es. El siguiente resultado demuestra que esto se debe a que A tiene un 'hueco', $(0,1]$, que es un intervalo semicerrado.

Teorema 4.2. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. La topología de A como subconjunto de $\mathbb{R}$, $\mathcal{T}_{A,\mathbb{R}}$, siempre será más fina que la topología del orden de A, $\mathcal{T}_{A,<}$. Además, las dos topologías coinciden si y solo si $\mathbb{R} - A$ no tiene ninguna componente conexa de forma $(a,b]$ o $[b,a)$, con $a, b \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Lo primero es consecuencia de que para cada $a, b \in A$, $(a,b)_A = (a,b)_\mathbb{R} \cap A$, $(\infty, b)_A = (\infty, b)_\mathbb{R} \cap A$ y $(a,\infty)_A = (a,\infty)_\mathbb{R} \cap A$, por tanto los abiertos de $\mathcal{T}_{A,<}$ también lo son en $\mathcal{T}_{A,\mathbb{R}}$.

Si A tiene un hueco de forma $(a,b]$, entonces $a \in A$ y hay una sucesión decreciente b_n que tiende a b, con $b_n \in A$ (si no pasaran estas cosas, estaríamos contradiciendo la maximalidad de $(a,b]$ como componente conexa de $\mathbb{R} - A$). Por tanto en $\mathcal{T}_{A,<}$, cada entorno de a contiene infinitos b_n, mientras que en $\mathcal{T}_{A,\mathbb{R}}$ no es así. Por tanto $\mathcal{T}_{A,\mathbb{R}} \neq \mathcal{T}_{A,<}$. Con los huecos de forma $[b,a)$ pasa lo mismo, claro.

[1] Normalmente tendríamos que indicar el orden además del conjunto al nombrar los intervalos, pero como aquí solo trataremos subconjuntos de $\mathbb{R}$ con su orden usual, no hay peligro de confusión.

Supongamos que A no tiene huecos de forma $(a, b]$ ni $[b, a)$. Para ver que $\mathcal{T}_{A,\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{T}_{A,<}$ nos bastará ver que para todos $a, b \in \mathbb{R}$, $(-\infty, b) \cap A$ y $(a, \infty) \cap A$ son abiertos en $\mathcal{T}_{A,<}$. Veamos el caso $(-\infty, b)$, el otro es simétrico. Si $b \in A$, es directo ya que $(-\infty, b) \cap A = (-\infty, b)_A$, que es abierto en $\mathcal{T}_{A,<}$. Si no, llamamos B a la componente conexa de b en $\mathbb{R} - A$. Dividimos en casos según qué tipo de intervalo es B:

- $B = [c, d]$, con $c \leq b \leq d$. Entonces, hay una sucesión $c_n \to c$ en A, y $(-\infty, b) \cap A = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} (-\infty, c_n)_A$ es abierto.
- $B = (-\infty, d]$, con $d \leq b$. Entonces $(-\infty, b) \cap A = \varnothing$ es abierto en A.
- $B = [c, \infty)$, con $c \leq b$. En este caso $(-\infty, b) \cap A = A$ es abierto en A.
- $B = (c, d)$, con $c < b$ o $c = -\infty$ y $d > b$. Entonces $(-\infty, b) \cap A = (-\infty, d)_A$ es abierto en A.
- $B = (c, \infty)$, con $c < b$ o $c = -\infty$. Entonces $(-\infty, b) \cap A = A$ es abierto en A.

□

Pasamos a demostrar que $\mathbb{R}$ tiene la siempre sorprendente propiedad (aunque casi todos los espacios que estamos estudiando la tengan) de homogeneidad por numerables densos. De hecho, aquí no generalizaremos pero en [Br13] se demuestra que $\mathbb{R}^n$ es homogéneo por numerables densos para todo n. Para ello usamos un conocido lema sobre órdenes, que también nos vendrá bien a la hora de caracterizar **I**. Recordemos que un orden lineal en un conjunto es denso si dados x, y cualesquiera con $x < y$ siempre existe z con $x < z < y$.

Lema 4.3 (Cantor)**.** *Dados X, Y conjuntos numerables con órdenes lineales densos sin máximos ni mínimos, hay un isomorfismo de orden $f : X \to Y$.*

Demostración. Sean (x_n), (y_n) enumeraciones de X e Y. Definiremos f recursivamente.

- Paso 1: Definimos $f(x_1) = y_1$.
- Paso n: Supongamos que ya hemos definido $f(x_1), \ldots, f(x_{n-1}), f^{-1}(y_1), \ldots, f^{-1}(y_{n-1})$, y que f es creciente estricta en su dominio. Llamamos $a_1, \ldots, a_k$ a los elementos de X donde hemos ya definido f, con $a_1 < \cdots < a_k$. Por tanto $f(a_1) < \cdots < f(a_k)$. Para definir $f(x_n)$ tenemos varios casos:
  - $x_n < a_1$. Entonces definimos $f(x_n)$ como un elemento de Y menor que $f(a_1)$ (existe ya que en Y no hay elemento mínimo).
  - $a_i < x_n < a_{i+1}$ para cierto i. Entonces definimos $f(x_n)$ de forma que $f(a_i) < f(x_n) < f(a_{i+1})$ (existe ya que Y es denso).
  - $x_n > a_k$. Definimos $f(x_n)$ como un elemento de Y mayor que $f(a_k)$.

  Por cómo hemos definido $f(x_n)$ está claro que f sigue siendo inyectiva y creciente en su dominio.

  De forma similar, usando que el orden de X es denso sin máximos ni mínimos, podemos encontrar $f^{-1}(y_n)$ (si no estaba ya definido) de forma que f siga siendo creciente.

Tras repetir este paso para cada n natural, está claro que la f que obtendremos será biyectiva (en cada paso hemos definido $f(x_n)$ distinto a los demás elementos de la imagen y hemos definido $f^{-1}(y_n)$). También es obvio por su construcción que será creciente. □

Proposición 4.4. *$\mathbb{R}$ es homogéneo por numerables densos.*

Demostración. Sean D, E dos subconjuntos numerables densos de $\mathbb{R}$. Por 4.3 habrá una función biyectiva creciente $g : D \to E$. Vamos a obtener una extensión suya $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea un homeomorfismo. Para ello, dado $x \in \mathbb{R}$, definiremos $f(x) = \sup\{g(q); q \in D, q < x\}$. f está bien definida ya que dado $r \in D$ que sea $> x$, $g(r)$ será una cota superior de $\{g(q); q \in D, q < x\}$.

Si $q \in D$, veamos que $f(q) = g(q)$. Dado $p < q$ en D, tendremos que $g(p) < g(q)$. Como esto se cumple para todo p, $f(q) \leq g(q)$. Además, como E es denso, hay una sucesión e_n en E estrictamente creciente que tiende a $g(q)$. Por tanto, como $f(q) > g(g^{-1}(e_n)) = e_n$ para todo n, $f(q) \geq g(q)$. Ergo, $f(q) = g(q)$.

Además, dados $x < y$ en $\mathbb{R}$, hay dos elementos c, d en D con $x < c < d < y$, y de la definición de f se desprende que $f(x) \leq g(c) < g(d) \leq f(y)$. Esto demuestra que f es estrictamente creciente, y por tanto inyectiva. Si demostramos que f es sobreyectiva, habremos comprobado que f es un isomorfismo de orden, y por tanto un homeomorfismo.

Veamos que f es sobre: dado $y \in \mathbb{R}$, definimos $x := \sup\{q \in D; g(q) < y\}$. Entonces, $f(x) \leq y$. Además, para cualquier $r \in E$ menor que y, tendremos que $g^{-1}(r) \leq x$, por tanto $r \leq f(x)$. Cogiendo una sucesión r_n en E que tiende a y por debajo, vemos que $y \leq f(x)$. Por tanto $y = f(x)$. □

En el anexo A hay un resultado aún más fuerte de homogeneidad de $\mathbb{R}$.

4.2 Continuos, puntos de corte. Caracterización de I

Un *continuo* es un espacio T_2, compacto y conexo. Un subcontinuo de un espacio es un subespacio suyo que es un continuo. Ejemplos de continuos son los cubos $\mathbf{I}^n$, las esferas $\mathbb{S}^n$ con $n \geq 1$, o cualquier otro subespacio compacto conexo de $\mathbb{R}^n$. También hay ejemplos más allá de $\mathbb{R}^n$, claro: cualquier producto de continuos es un continuo. Por ejemplo, $\mathbf{I}^\alpha$ es un continuo para cualquier cardinal α (y para $\alpha > \aleph_0$, esto ni siquiera es metrizable). Nuestro objetivo será caracterizar $\mathbf{I}$ como continuo. Esta sección va a seguir de cerca el tema 28 de [Wi70], arreglando de paso un detalle de la prueba de 28.7 (aquí, la proposición 4.10).

Recordemos que un conjunto dirigido $(X, \preceq)$, es un conjunto X con una relación $\preceq$ en X reflexiva, transitiva, y tal que para cada dos elementos x, y en X hay z con $x \preceq z$, $y \preceq z$. Por ejemplo, los conjuntos linealmente ordenados son dirigidos. Una familia $\mathcal{K}$ de conjuntos está dirigida por la inclusión inversa si dados finitos conjuntos de $\mathcal{K}$, hay otro contenido en su intersección.

Proposición 4.5. *Sea X T_2, y sea $\mathcal{K} = \{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una colección de subcontinuos de X dirigidos por la inclusión inversa. Entonces $K = \bigcap_{\alpha \in A} K_\alpha$ es un continuo. Además, si $K_\alpha \neq \varnothing$ para todo α, $K \neq \varnothing$.*

Demostración. Podemos suponer que X es compacto: si no, sustituimos X por K_α para algún K_α no vacío, y K_β por $K_\alpha \cap K_\beta$.

Que K compacto es obvio. Supongamos que no es conexo, es decir, hay una separación de K, $K = X_1 \cup X_2$, con X_1 y X_2 disjuntos y cerrados en K y $x \in X_1$. Entonces X_1 y X_2 son cerrados en X, por tanto como X es normal, hay conjuntos U, V disjuntos abiertos en X con $X_1 \subseteq U$, $X_2 \subseteq V$. $U \cup V$ es un entorno de K. $X - K_\alpha$ es un recubrimiento abierto del compacto $X - (U \cup V)$. Por tanto habrá finitos $K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_n}$ cuyos complementarios recubren $X - (U \cup V)$. Llamando K_{α_0} a un elemento de $\mathcal{K}$ contenido en todos ellos, K_{α_0} está contenido en $U \cup V$. Esto es absurdo, ya que entonces U y V son una separación de K_{α_0}, contradiciendo que es conexo.

Si K_α es no vacío para todo α, entonces al ser $\mathcal{K}$ dirigido por la inclusión inversa será un conjunto de cerrados con la propiedad de la intersección finita, por tanto su intersección, K, es no vacía. □

Definición 4.6. Un continuo K es irreducible respecto a un subconjunto A si ningún subcontinuo propio de K contiene a A. Si $A = \{a, b\}$, decimos que K es irreducible entre a y b.

Proposición 4.7. *Dado un continuo K y un subespacio suyo A, hay un subcontinuo de K irreducible respecto a A.*

Demostración. El conjunto $\mathcal{K}$ de subcontinuos de X que contienen a A está parcialmente ordenado por la inclusión. Además, por 4.5 cada cadena en $\mathcal{K}$ tiene un elemento minimal (la intersección de sus elementos). Por el lema de Zorn, habrá un elemento minimal de $\mathcal{K}$, que por tanto será irreducible respecto a A. □

Por ejemplo, cualquier arco entre 2 puntos en $\mathbb{R}^n$ es un subcontinuo irreducible entre los dos puntos.

Definición 4.8. Sea X conexo, T_1. Decimos que $p \in X$ es un punto de corte de X si $X - \{p\}$ no es conexo.

Un corte de X es una terna (p, U, V), donde p es un punto de corte de X y U, V son dos abiertos disjuntos no vacíos de unión $X - \{p\}$.

Proposición 4.9. *Si (p, U, V) es un corte de un continuo K, entonces $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ con conexos (y por tanto continuos).*

Demostración. $U \cup \{p\}$ y $V \cup \{p\}$ son cerrados, y por tanto compactos, por ser los complementarios de V y U en K. Para ver que son conexos, consideramos la función

$$\begin{array}{rccc} f: & K & \rightarrow & K; \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \in U \cup \{p\} \\ p & \text{si } x \in V \cup \{p\} \end{array} \right. \end{array}$$

Como f es continua en $U \cup \{p\}$ y en $V \cup \{p\}$, por el lema del pegamento es continua. Por tanto $U \cup \{p\}$ es la imagen continua de K, que es conexo, por tanto es conexo. De forma análoga podemos ver que $V \cup \{p\}$ es conexo. □

Proposición 4.10. *Si (p, U, V) es un corte de un continuo K, entonces U y V contienen algún punto que no es de corte de K.*

Demostración. Supongamos que todos los puntos x de U son de corte en K, introduciendo un corte (x, U_x, V_x), y vamos a llegar a contradicción. Si $x \in U$, U_x y V_x no pueden intersecar ambos $V \cup \{p\}$, ya que lo separarían, y por la proposición anterior $V \cup \{p\}$ es conexo. Por tanto, uno de los abiertos, que será el que llamemos U_x, está incluido en U (y V está contenido en V_x).

Algo que usaré un par de veces es que si x, y son puntos de U y $x \in U_y$, entonces $U_x \subseteq U_y$. Esto pasa porque si no, U_x y V_x intersecarían ambos $V_y \cup \{y\}$, desconectándolo.

Entonces, $\mathcal{U} = \{U_x \cup \{x\}\}_{x \in U}$ es una familia de continuos contenidos en $U \cup \{p\}$. Además, $\mathcal{U}$ es parcialmente ordenado respecto a la inclusión inversa. Veamos que $\mathcal{U}$ tiene elementos maximales usando el lema de Zorn. Dada una cadena $\mathcal{A} = \{U_x \cup \{x\}\}_{x \in A}$, al ser un conjunto dirigido de continuos no vacíos, su intersección será por 4.5 un continuo no vacío, L. Sea q un punto de L. Entonces $q \in U_x \cup \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{A}$, por tanto $U_q \subseteq U_x$ para todo $x \in A$, ergo $U_q \cup \{q\} \subseteq L$. Es decir, $U_q \cup \{q\}$ es una cota superior de la cadena. Por el lema de Zorn, tendremos un punto r tal que $U_r \cup \{r\}$ es maximal respecto a la inclusión inversa en U. Pero, cogiendo un punto $s \in U_r$, tenemos de nuevo que $U_s \subseteq U_r$. Por tanto $U_s \cup \{s\} \subsetneq U_r \cup \{r\}$, contradiciendo la maximalidad de $U_r \cup \{r\}$. □

Teorema 4.11. *Todo continuo K con más de un punto tiene al menos dos puntos que no son de corte.*

Demostración. Si K tiene puntos de corte, el resultado es cierto por 4.10. Si no, el resultado es obvio. □

Este resultado tiene mucho que ver con **I**: la caracterización que daremos de **I** es que es el único continuo metrizable con exactamente 2 puntos de corte. Pero todavía necesitamos más resultados para esto. El primero nos dice que ningún subcontinuo propio de un continuo K puede contener todos sus puntos que no son de corte.

Teorema 4.12. *Un continuo K es irreducible respecto a su conjunto de puntos que no son de corte.*

Demostración. Supongamos que hay un subcontinuo $L \subseteq K$ que contiene todos los puntos que no son de corte de K. Dado $x \in K - L$, habrá un corte (x, U, V) de K. Como L es conexo, no puede intersecar a U y a V, por tanto suponemos por ejemplo $L \subseteq U$. Pero por 4.10, hay puntos que no son de corte de K en V, lo cual contradice que L contiene todos los puntos que no son de corte de K. □

Pasamos a ver una relación de orden que podemos establecer entre puntos de corte.

Definición 4.13. Un punto de corte p en un espacio X *separa a de b* si hay un corte de X, (p, U, V), con $a \in U$ y $b \in V$.
Llamamos $E(a, b)$ al conjunto de elementos a, b y todos los puntos de corte que los separan.
Definimos la relación $\leq$ en $E(a, b)$ por: $a \leq p \leq b$ para todo p, y para el resto de puntos, $p_1 \leq p_2$ sii $p_1 = p_2$ o p_1 separa a de p_2.

Proposición 4.14. *Si a, b son puntos en un continuo K, la relación $\leq$ de 4.13 es un orden total en $E(a, b)$.*

Demostración. Basta ver que $\leq$ es un orden lineal en $E(a,b)-\{a,b\}$. Dado $p \in E(a,b)-\{a,b\}$, llamamos (p,U_p,V_p) a alguna separación de a y b por p, con $a \in U_p$ y $b \in V_p$.

Dados p y q de $E(a,b)-\{a,b\}$ distintos, U_p y U_q se cortan en a, y V_p y V_q se cortan en b. Distinguimos dos posibles casos.

- Si $q \in V_p$, p separa a de q, $p \leq q$. V_q no puede cortar $U_p \cup \{p\}$, ya que entonces U_q y V_q separarían $U_p \cup \{p\}$. Por tanto $V_q \subseteq V_p$.
- Si $q \in U_p$, U_q no puede cortar $V_p \cup \{p\}$, ya que entonces U_q y V_q separarían $V_p \cup \{p\}$. Por tanto $U_q \subseteq U_p$. Tomando complementarios, $V_p \cup \{p\} \subseteq V_q \cup \{q\}$. Como $p \neq q$, tenemos que $p \in V_q$. Es decir, q separa a de p, $q \leq p$.

La relación $\leq$ es obviamente reflexiva. Como hemos visto en la división en casos, dados dos elementos de $E(a,b)-\{a,b\}$ p y q, se tiene que $p \leq q$ o $q \leq p$. Queda ver las propiedades antisimétrica y transitiva.

Si $p \leq q$ y $q \leq p$, $q \in V_p$ y $p \in V_q$ para algunos cortes (p,U_p,V_p) y (q,U_q,V_q). Por lo visto en el primer caso, tendremos que $V_q \subseteq V_p$ y $V_p \subseteq V_q$, ergo $V_p = V_q$. Por tanto la frontera de V_p es igual a la de V_q, es decir, $p = q$.

Si $p \leq q$ y $q \leq r$, $q \in V_p$ y $r \in V_q$ para algunos cortes (p,U_p,V_p) y (q,U_q,V_q). Por tanto $V_q \subseteq V_p$ y $V_r \subseteq V_q$, ergo $V_r \subseteq V_p$. Por tanto $r \in \overline{V_r} \subseteq \overline{V_p} = V_p \cup \{p\}$. Como $r \neq p$, $r \in V_p$, es decir, $p \leq r$. □

Ahora que sabemos que $\leq$ es un orden lineal en $E(a,b)$, es natural pensar en su topología del orden. Vamos a ver un caso en que la topología del orden de $E(a,b)$ y la heredada como subconjunto de K coinciden.

Proposición 4.15. *Si K es un continuo con solo dos puntos que no son de corte, a y b, entonces $E(a,b) = K$ y la topología en K es la de orden.*

Demostración. $E(a,b) = K$ ya que dado un punto $p \in K-\{a,b\}$, tiene un corte asociado (p,U_p,V_p). Por 4.10, U_p y V_p contienen algún punto que no es de corte. Estos puntos solo pueden ser a y b, por tanto p separa a y b. Pasamos a comparar la topología de K y la del orden.

En la división de casos de 4.14 comprobamos que, dados $p,q \in K-\{a,b\}$, $p < q$ sii $q \in V_p$ sii $p \in U_q$. Por tanto una subbase de la topología del orden serán los subconjuntos de forma $(-\infty,q) = U_q$ y $(p,\infty) = V_p$. Estos son abiertos en la topología de K.

Ahora, consideramos la función identidad en K, 1_K, donde el espacio de partida tiene la topología de K y el de llegada tiene la topología del orden. El dominio de la función es compacto, y la imagen es T_2. Además, por el párrafo anterior la función es continua. Al ser biyectiva, f es un homeomorfismo.

□

Ya estamos listos para la caracterización de **I** como continuo.

Teorema 4.16. *Si K es un continuo metrizable y tiene exactamente 2 puntos que no son de corte, es homeomorfo a **I**.*

Demostración. Como K e **I** tienen la topología del orden por 4.15 y 4.2, nos basta demostrar que hay un isomorfismo de orden (función biyectiva creciente) entre ellos.

Como K es métrico compacto, tiene algún subconjunto D numerable denso, que podemos suponer que no contiene los puntos que no son de corte, a y b. Este subconjunto D no tiene elemento mínimo ni máximo, ya que a, b están en su cierre. Además, dados dos puntos r, s en D, $(r,s)_K$ no es vacío por ser K conexo, por tanto como D es denso en K, $(r,s)_D$ no es vacío. Es decir, el orden de D es denso. Por el lema 4.3, habrá un isomorfismo g de orden de D sobre $\mathbb{Q} \cap (0,1)$.

Nos bastará entonces extender este isomorfismo g a un isomorfismo de orden $f : K \to [0,1]$. Lógicamente, definimos $f(a) = 0$, $f(b) = 1$. Si p es otro punto de K, definimos $f(p)$ como $\sup\{g(q); q \leq p\}$. De este modo, está claro que si q es un punto de D, entonces si $p \leq q$ tendremos que $f(p) \leq g(q)$, y si $p > q$, $f(p) > g(q)$. Al haber puntos de D entre cada 2 puntos distintos de K, esto implica que f es inyectiva. Además, f es obviamente creciente.

Falta ver que f es sobre. Pero dado un punto $x \in \mathbf{I}$, hay una sucesión q_n de racionales que tiende a x por abajo. Cogiendo $p = \sup\{g^{-1}(q_n)\}$, es obvio que $f(p) \leq x$. Además $f(p) \geq x$ ya que para cualquier q racional $\leq x$, $f(p) \geq q$, ya que hay n con $q_n > q$. De modo que $f(p) = x$. $\square$

Uno se puede preguntar sobre la homogeneidad de $\mathbf{I}$. Este es el único de los espacios que vamos a estudiar que no es homogéneo, ya que todos sus puntos son de corte excepto 0 y 1. Esto implica que el espacio no es homogéneo por numerables densos, ya que algunos subconjuntos numerables densos en $\mathbf{I}$ contienen a $\{0, 1\}$ y otros no. Aunque, si exigimos que 0 y 1 no estén en los numerables densos, sí podemos obtener un resultado:

Proposición 4.17. *Sean A, B subconjuntos numerables densos de $\mathbf{I}$ que no contienen 0 ni 1. Entonces hay un homeomorfismo $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ con $f(A) = B$.*

Demostración. Como $(0, 1)$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$, que es homogéneo por numerables densos, habrá un homeomorfismo $f : (0, 1) \to (0, 1)$ con $f(A) = B$. Si queremos podemos tomar f creciente, como en la prueba de 4.4. Entonces, como f es creciente biyectiva de $(0, 1)$ en $(0, 1)$, tendremos $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$. Por tanto, definiendo $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, tenemos una función $f : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ biyectiva continua de compacto en T_2, es decir, un homeomorfismo. $\square$

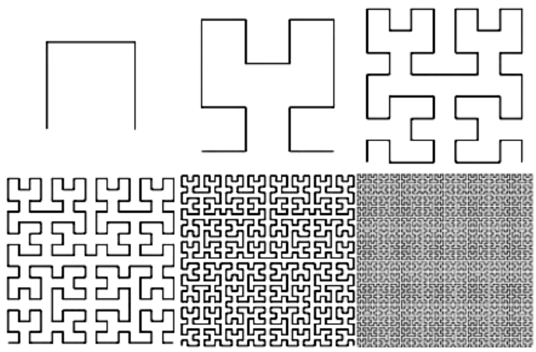
Capítulo 5

Continuos de Peano

Pasamos a estudiar las imágenes continuas de $\mathbf{I}$ y $\mathbb{R}$. El famoso teorema de Hahn-Mazurkiewicz demuestra que las imágenes continuas T_2 de $\mathbf{I}$ son exactamente los continuos de Peano, que describimos a continuación. Para las imágenes de $\mathbb{R}$ no parece haber una caracterización tan bonita, pero en la segunda sección damos una clase de ellas más amplia que los espacios de Peano. Por último usamos estos resultados para dar una caracterización de $\mathbb{R}$ en la tercera sección.

5.1 Continuos de Peano. Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

Recordemos que una curva o camino en un espacio X es una función continua $f : \mathbf{I} \to X$. Un concepto similar pero más restrictivo es el de arco: $f : \mathbf{I} \to X$ es un *arco* de a a b si f es un homeomorfismo sobre su imagen, $f(0) = a$ y $f(1) = b$. En general llamaremos arcos a los espacios homeomorfos a $\mathbf{I}$. La pregunta que nos hacemos en esta sección es, ¿qué espacios son imágenes continuas de $\mathbf{I}$? A finales del siglo XIX, Peano descubrió que hay curvas que cubren el cuadrado, $\mathbf{I}^2$. Construyó un ejemplo como el límite uniforme de una sucesión de curvas. En la figura se ve una construcción similar de Hilbert. Construyendo curvas similares, se puede ver que $\mathbf{I}^n$ es imagen de $\mathbf{I}$ para todo n.



En esta sección caracterizaremos qué espacios T_2 son imágenes continuas de $\mathbf{I}$. Estos espacios serán obviamente compactos y conexos. Además, por 1.15, serán metrizables. Otra propiedad que cumplirán, que no es tan obvia, es conexión local (un espacio es localmente conexo si cada punto tiene una base de entornos abiertos y conexos). Para demostrarlo usaremos el siguiente lema técnico.

Lema 5.1. *Si $f : X \to Y$ es una aplicación cociente y X es localmente conexo, Y es localmente conexo.*

Demostración. Usaremos la caracterización de que Y es localmente conexo sii para todo abierto V de Y, las componentes conexas de V son abiertas (27.9 de [Wi70]).

Sea V un abierto de Y, sea y un punto de V y $C(y)$ la componente conexa de y en V. Queremos ver que $C(y)$ es abierta. Como f es cociente, nos bastará con que $C = f^{-1}(C(y))$ sea abierto. Dado $x \in C$, al ser X localmente conexo, la componente conexa U_x de x en $f^{-1}(V)$ será abierta. Como $f(U_x) \subseteq V$ es conexo, $f(U_x) \subseteq C(y)$, ergo U_x está contenido en C. Por tanto x es interior a C, es decir, C es abierto. □

Si X es un espacio T_2 y $f : \mathbf{I} \to X$ es continua sobre, f es cerrada y por tanto una aplicación cociente, así que por el lema anterior X es localmente conexo.

Definición 5.2. Un continuo de Peano es un espacio metrizable, compacto, conexo y localmente conexo.

Por lo que hemos visto, las imágenes continuas de **I** que son T_2 son continuos de Peano. Durante el resto de esta sección demostraremos la implicación recíproca, siguiendo de cerca el capítulo 31 de [Wi70]. Un primer paso para ello es demostrar que los continuos de Peano son conexos por caminos. De hecho vamos a demostrar algo más fuerte: que son conexos por arcos. Así obtendremos que un espacio T_2 es conexo por caminos si y solo si es conexo por arcos, un resultado intuitivo pero nada fácil de demostrar. Comenzamos con unos lemas sobre conexión y cadenas de abiertos.

Definición 5.3. Una cadena entre a y b en un espacio X es una sucesión $(U_1, \dots, U_n)$ de abiertos en X con $a \in U_1$, $b \in U_n$ y $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing \; \forall i$. Decimos que la cadena es simple si a solo está en U_1, b solo está en U_n y $U_i \cap U_j = \varnothing \iff |i-j| > 1$.

En el siguiente teorema usaremos el hecho fácil de comprobar de que la unión de los elementos de una cadena de conjuntos conexos es conexa. Esto se puede comprobar ya que si tenemos la cadena de conjuntos conexos $(U_1, \dots, U_n)$, entonces cualquier conjunto clopen que contenga algún punto de U_1 tendrá que contener a U_1 completo por ser U_1 conexo. Por tanto el clopen interseca U_2, y por tanto contiene U_2, y así por inducción vemos que el clopen contiene todos los elementos de la cadena.

Lema 5.4. *Si X es conexo y $\mathcal{U}$ es un recubrimiento abierto de X, dados a y b de X habrá una cadena simple de abiertos de $\mathcal{U}$ entre a y b.*

Demostración. Consideramos Z, el conjunto de puntos de X conectados a a por alguna cadena simple de abiertos de $\mathcal{U}$. Este conjunto es claramente abierto, ya que si $x \in Z$ y la cadena simple $U_1, \dots, U_n$ conecta a y x, entonces el entorno U_n de x está contenido en Z. Veamos que Z es cerrado. Sea $x \in \overline{Z}$. Sea $U \in \mathcal{U}$ entorno de x, y sean $y \in U \cap Z$ y $(U_1, \dots, U_n)$ una cadena entre a e y. Tenemos dos casos: si x está en algún U_i, cogemos el menor i que cumpla eso y entonces $(U_1, \dots, U_i)$ es una cadena simple desde a hasta x, ergo $x \in Z$. Si x no está en ningún U_i, sea i el menor índice tal que $U_i \cap U \neq \varnothing$. Entonces $(U_1, \dots, U_i, U)$ es una cadena simple de a a x, por tanto $x \in Z$. ☐

El siguiente teorema es vital y su demostración es bastante geométrica y pesada de formalizar. Tanto es así que en muchos libros la demostración es errónea o al menos incompleta, como se explica en [Ba84]. La demostración de aquí es una modificación de la que aparece en [Wi70].

Teorema 5.5. *Todo continuo de Peano es conexo por arcos.*

Demostración. Sea X nuestro espacio, y sean dos puntos suyos a y b. Por el lema anterior hay una cadena simple desde a hasta b de abiertos conexos de diámetro < 1, que llamaremos $\mathfrak{C}_1 = (U_{11}, \dots, U_{1n_1})$.
Para crear un arco desde a hasta b vamos a usar una sucesión de cadenas simples desde a a b creadas recursivamente. Las llamaremos $\mathfrak{C}_k = (U_{k,1}, \dots, U_{k,n_k})$, para $k \geq 2$, y cumplirán estas propiedades:

(1) $\mathfrak{C}_k$ es una cadena simple desde a a b de abiertos conexos de diámetro $< \frac{1}{2^k}$.

(2) Todos los abiertos $U_{k,i}$ de $\mathfrak{C}_k$ cumplen que $\overline{U_{k,i}} \subseteq U_{k-1,j}$ para algún j.

(3) Para cada k, hay índices $0 = j_0 < j_1, \dots < j_{n_k} = n_{k+1}$ de forma que, en la cadena $\mathfrak{C}_{k+1}$, los $U_{k+1,l}$ con $j_{i-1} < l \leq j_i$ están contenidos en $U_{k,i}$.

Para crear $\mathfrak{C}_{k+1}$ a partir de $\mathfrak{C}_k$, empezamos encontrando para cada punto p de $U_{k,i}$ un entorno abierto conexo de p, V_p, con $\overline{V_p} \subseteq U_{k,i}$ y con diámetro $< \frac{1}{2^{k+1}}$. Esto forma recubrimientos abiertos de los $U_{k,i}$.

Ahora, cogemos para cada $i = 1, \dots, n_k - 1$ un $x_i \in U_{k,i} \cap U_{k,i+1}$, y llamamos $x_0 = a, x_{n_k} = b$. Para cada $i = 1, \dots, n_k$, encontramos una cadena simple $\mathfrak{D}_i$ dentro de $U_{k,i}$ desde x_{i-1} a x_i, formada por los V_p definidos antes. Uniendo todas estas cadenas para formar una nueva cadena, $(V_1, \dots, V_m)$ esta será una cadena desde a a b, pero no tiene por qué ser simple: puede haber intersecciones no deseadas. Sin embargo, esto se puede arreglar fácilmente: si V_i interseca V_j en algún punto, con $|j-i| \geq 2$, entonces podemos omitir todos los V_k con k entre i y j. Como en este proceso estamos eliminando elementos de la cadena, solo podremos repetirlo finitas veces, y cuando ya no se pueda repetir más habremos obtenido una cadena simple, que es $\mathfrak{C}_{k+1}$.

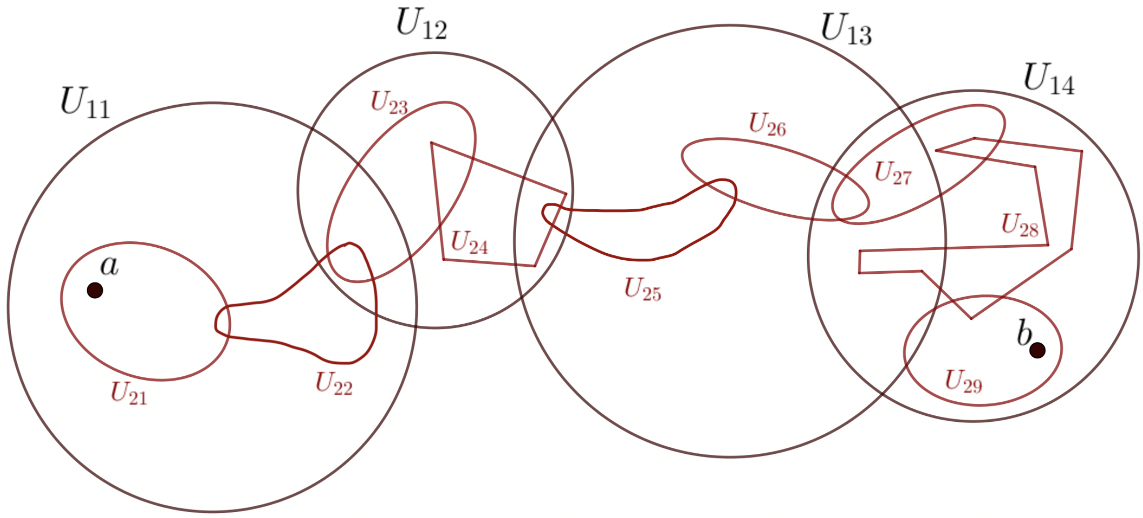


Figura 5.1: Ejemplo de construcción de las cadenas $\mathfrak{C}_1$ y $\mathfrak{C}_2$.

Para comprobar que esta cadena cumple (3), cogemos $j_0 = 0$ y el resto de j_i de modo que U_{k+1,j_i} es el último elemento de $\mathfrak{D}_i$ que ha quedado en $\mathfrak{C}_{k+1}$. Tal elemento tiene que existir: si no, todo elemento de $\mathfrak{C}_{k+1}$ estaría contenido en algún elemento de $\mathfrak{C}_k$ distinto de $U_{k,i+1}$. Por tanto las uniones $\cup_{j=0}^{i} U_{k,j}$ y $\cup_{j=i+2}^{n_k} U_{k,j}$ serían abiertos que desconectarían la unión de elementos de $\mathfrak{C}_{k+1}$. Esto es absurdo ya la que unión de los elementos de una cadena de conexos tiene que ser conexa.

Procedemos ya a la construcción del arco desde a hasta b. Para cada k, consideramos C_k, la unión de los cierres de todos los elementos de $\mathfrak{C}_k$. Este conjunto es claramente compacto y conexo (cierre de un conexo es conexo y unión de una cadena de conexos es conexa), por tanto es un continuo. De modo que por 4.5, $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ también es un continuo. Si comprobamos que todo punto de C excepto a y b es de corte, tendremos que C es un arco desde a hasta b por 4.11 y 4.16 y habremos acabado.

Sea $x \in C - \{a, b\}$. Por la propiedad (2), está claro que x está en algún elemento de $\mathfrak{C}_k$ para cada k. De hecho estará en 1 o en 2 elementos de cada $\mathfrak{C}_k$, por ser $\mathfrak{C}_k$ cadenas simples. Llamamos $n_{k,1}$ y $n_{k,2}$, con $n_{k,1} \leq n_{k,2}$, a los índices (consecutivos o iguales) tales que x está en $U_{k,n_{k,1}}$ y $U_{k,n_{k,2}}$. Como x no es a ni b, está claro que para k suficientemente grande tendremos que $n_{k,1} > 0$ y $n_{k,2} < n_k$. Definimos para cada k la siguiente partición de C_k:

$L_k = \overline{U_{k,n_{k,1}} \cup U_{k,n_{k,2}}}$.

$A_k = \left(\cup_{i=0}^{n_{k,1}-1} U_{k,i}\right) - L_k$.

$B_k = \left(\cup_{i=n_{k,2}+1}^{n_k} U_{k,i}\right) - L_k$.

Es decir, L_k será el cierre la unión de los elementos de $\mathfrak{C}_k$ que contienen a x, A_k será la 'parte de la cadena $\mathfrak{C}_k$ anterior a L_k' y B_k será la 'parte de la cadena $\mathfrak{C}_k$ posterior a L_k'. Además, A_k y B_k son abiertos disjuntos por ser $\mathfrak{C}_k$ cadena simple, y el diámetro de L_k tiende a 0 cuando k tiende a ∞. También se cumple por (2) que $L_{k+1} \subseteq L_k$ para todo k. Veamos que x es un punto de corte de C dando una separación de $C - \{x\}$ en los dos abiertos:

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \cap C \quad y \quad B = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \cap C,$$

Es fácil ver que $A \cup B = C - \{x\}$, ya que como $diam(L_k) \to 0$, cualquier punto de C excepto x tendrá que estar en A_k o B_k para k suficientemente grande. Tenemos que ver también que A y B son disjuntos. Si no lo fueran, habría k y l con $A_k \cap B_l \cap C \neq \varnothing$. Como A_k y B_k son disjuntos, $k \neq l$. Supongamos que $k < l$ (el otro caso es simétrico). Nos vale ver que si un punto y de C está en A_k, entonces está en A_{k+1}, ya que entonces por inducción estará en A_l y por tanto no podrá estar en B_l, contradiciendo $A_k \cap B_l \cap C \neq \varnothing$.

Supongamos entonces que tenemos un punto $y \in A_k \cap C$. Veamos dónde está y en la cadena $\mathfrak{C}_{k+1}$, usando la notación de (3). Por estar en A_k, y no está en $U_{k,o}$ para ningún $o \geq n_{k,1}$. Así que por (3), en $\mathfrak{C}_{k+1}$, y no estará en elementos $U_{k+1,\alpha}$ con $\alpha > j_{n_{k,1}-1}$. Por otra parte, x no puede estar en ningún $U_{k+1,\beta}$ con $\beta \leq j_{n_{k,1}-1}$, ya que entonces x estaría en algún $U_{k,N}$ con $N \leq n_{k,1} - 1$, y esto no pasa por definición de $n_{k,1}$. Así que x aparecerá en elementos $U_{k+1,\beta}$ con $\beta > j_{n_{k,1}-1}$.

Por tanto, como los índices β en los que aparece x son mayores que los índices α con los que aparece y en la cadena $\mathfrak{C}_{k+1}$, y no estará en B_{k+1}. Tampoco estará en L_{k+1} ya que $L_{k+1} \subseteq L_k$, osea que $y \in A_{k+1}$, como queríamos.

□

Corolario 5.6. *Si A es un subespacio abierto conexo de un continuo de Peano X, entonces A es conexo por arcos.*

Demostración. En la prueba anterior, si los dos puntos a y b son de A, usando que A es abierto conexo en X (por tanto, localmente conexo) y 5.4 podemos formar la cadena $\mathfrak{C}_1$ de forma que sus elementos están contenidos en A. Como el arco que se forma está contenido en la unión de elementos de $\mathfrak{C}_1$, el arco que obtendremos en la prueba estará en A, es decir, A es conexo por arcos. □

Teorema 5.7. *Un espacio T_2 es conexo por caminos si y solo si es conexo por arcos.*

Demostración. Si X es conexo por arcos, es obvio que lo será por caminos. Si X es conexo por caminos, dados dos puntos a y b, hay $f : \mathbf{I} \to X$ continua con $f(0) = a$, $f(1) = b$. Pero como, por lo visto al principio de la sección, $f(\mathbf{I})$ es un continuo de Peano, $f(\mathbf{I})$ será conexo por arcos. Es decir, hay un arco que une a y b en $f(\mathbf{I})$, y por tanto en X. □

La condición de ser T_2 es necesaria para el teorema anterior: la recta de dos orígenes, que es T_1 pero no T_2, es conexa por caminos pero no es difícil comprobar que los dos orígenes no pueden conectarse por un arco.

La estrategia que usaremos para ver que los continuos de Peano son imágenes de $\mathbf{I}$ comienza viendo que por el teorema de Hausdorff-Alexandroff 1.12, hay una función continua sobre X desde el conjunto de Cantor, $g : \mathcal{C} \to X$. Luego tendremos que extender g a una función continua $f : \mathbf{I} \to X$, es decir, hay que crear una imagen de f para cada 'hueco' (a_i, b_i) del conjunto de Cantor. Como ahora sabemos que X es conexo por caminos, podemos definir f en $[a_i, b_i]$ como un camino desde $g(a_i)$ hasta $g(b_i)$, y de hecho esa es la idea que usaremos. Sin embargo, como tenemos que definir las imágenes en infinitos intervalos, el lema del pegamento no se aplica y puede pasar que la f resultante no sea continua. Para sortear esta dificultad desarrollaremos el concepto de conexión por caminos local uniforme.

Recordemos en un momento el concepto de número de Lebesgue de un recubrimiento: Dado un espacio métrico compacto X y un recubrimiento suyo $\mathcal{U}$, la función

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \to & \mathbb{R}; \\ & x & \mapsto & \sup\{r > 0; B(x,r) \subseteq U \text{ para algún } U \in \mathcal{U}\} \end{array}$$

es positiva y continua (tiene constante de Lipschitz 1), por tanto alcanza un mínimo $\delta > 0$. A este δ le llamamos número de Lebesgue del recubrimiento, y por su definición cualquier subconjunto de X de diámetro $< \delta$ estará contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$.

Lema 5.8. *Un espacio métrico localmente conexo compacto es uniformemente localmente conexo, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ tal que si $d(x,y) < \delta$, x e y están en un subespacio conexo de X de diámetro $< \varepsilon$. Además, el subespacio se puede coger abierto.*

Demostración. Si partimos de un recubrimiento $\mathcal{U}$ de X por abiertos conexos de diámetro $< \varepsilon$, el número de Lebesgue δ de este recubrimiento cumple el enunciado, ya que si $d(x,y) < \delta$, $\{x,y\}$ estará contenido en algún elemento de $\mathcal{U}$. □

Teorema 5.9. *Un continuo de Peano X es uniformemente localmente conexo por arcos, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay δ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces hay un arco que une x e y de diámetro $< \varepsilon$.*

Demostración. Por el lema anterior, dado $\varepsilon > 0$ habrá δ tal que si $d(x, y) < \delta$, x, y están en un subespacio abierto conexo U de diámetro $< \varepsilon$. Al ser U abierto conexo en X, por 5.6 habrá un arco entre x e y en U, que por tanto tendrá diámetro $< \varepsilon$. □

Teorema 5.10 (Hahn-Mazurkiewicz)**.** *Un espacio T_2 X es una imagen continua de $\mathbf{I}$ si y solo si es un continuo de Peano.*

Demostración. La implicación directa ya la probamos al principio de la sección.

Sea X un continuo de Peano. Entonces por el Teorema de Hausdorff-Alexandroff 1.12 hay una función $g : \mathcal{C} \to X$ sobreyectiva continua. Recordemos que el conjunto de Cantor se obtiene de quitar numerables intervalos a $\mathbf{I}$. Llamaremos a estos intervalos I_n: $I_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), I_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right), I_3 = \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right), I_4 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \ldots$

Vamos a definir nuestra función $f : \mathbf{I} \to X$ continua, que será una extensión de g (y por tanto, sobreyectiva). Tenemos que definir f en $I_n = (p_n, q_n)$ para todo n, y la definiremos como un arco entre $g(p_n)$ y $g(q_n)$. Para que f sea continua, tendremos que asegurarnos de que si el intervalo (p_n, q_n) es suficientemente pequeño, el arco desde $g(p_n)$ a $g(q_n)$ tendrá un diámetro tan pequeño como queramos. Podremos conseguir esto gracias al lema 5.8 y a la continuidad uniforme de g, como vemos en el siguiente párrafo.

Para cada $\varepsilon > 0$, hay $\delta > 0$ tal que si $d(p, q) < \delta$, entonces por el lema 5.8 cualesquiera 2 puntos de X a distancia $< \delta$ están unidos por un arco de diametro $< \varepsilon$. Ergo, como g es uniformemente continua, habrá $\gamma > 0$ tal que si dos puntos del conjunto de Cantor, x, y están a distancia $< \gamma$, entonces hay un arco entre $g(x)$ y $g(y)$ de diámetro $< \varepsilon$.

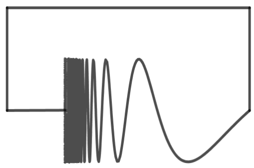
Usando esto, definimos f en I_n como un arco entre $g(p_n)$ y $g(q_n)$, de forma que para cada $\varepsilon > 0$ hay $\delta > 0$ de forma que si $q_n - p_n < \delta$, entonces el arco $f([p_n, q_n])$ tiene diámetro $< \varepsilon$. Es decir, intuitivamente, cuando $d(p_n, q_n)$ tiende a 0, el diámetro del arco $f([p_n, q_n])$ tiende a 0. Está claro que f es continua en los puntos interiores de los intervalos I_n, así que veamos que es continua en los puntos que quedan, que son los de $\mathcal{C}$.

Dado $x \in \mathcal{C} - \{1\}$, veamos que f es continua por la derecha en x (el caso izquierdo es simétrico).
Si $x = p_n$ para algún n, es obvio que f es continua por la derecha en x, ya que es continua en $[p_n, q_n]$.
Si no, sea $\varepsilon > 0$. Solo hay finitos intervalos (p_n, q_n) tales que $f([p_n, q_n])$ tiene diámetro $> \frac{\varepsilon}{2}$. Cogemos $\delta > 0$ tal que $(x, x+\delta) \subseteq \mathbf{I}$ no interseca ninguno de esos intervalos y de forma que si $y \in \mathcal{C}$ y $|x-y| < \delta$, $d(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ahora, dado $y \in (x, x + \delta)$, si $y \in \mathcal{C}$ tenemos que $d(g(x), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, y si no, y está en (p_n, q_n), con $x < p_n < y$.
Así que $d(g(x), g(y)) \leq d(g(x), g(p_n)) + d(g(p_n), g(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ergo $f((x, x + \delta)) \subseteq B(g(x), \varepsilon)$. □

5.2 Imágenes continuas de $\mathbb{R}$. Continuos generalizados de Peano

Ahora que hemos caracterizado las imágenes continuas T_2 de $\mathbf{I}$, podríamos pensar en caracterizar las de $\mathbb{R}$. Las imágenes continuas de $\mathbb{R}$ son conexas por caminos y separables, y ahí se acaban nuestras buenas noticias.

Una imagen T_2 de $\mathbb{R}$ no tiene por qué ser metrizable: para ello basta pensar en el cociente de $\mathbb{R}$ que obtenemos al identificar todos los puntos de $\mathbb{Z}$. En este cociente, el punto correspondiente a $\mathbb{Z}$ no tiene una base numerable de entornos, por tanto el espacio no es metrizable. La imagen tampoco tiene por qué ser localmente conexa ni localmente compacta, como indica la versión del círculo de Varsovia de la figura, formada por la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ en $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ y 4 segmentos cerrados.



Por otra parte, como $[0, 1]$ es una imagen continua de $\mathbb{R}$, todos los continuos de Peano serán imágenes de $\mathbb{R}$. Como las imágenes de $\mathbb{R}$ no tienen por qué ser compactas, podemos obtener una clase algo más amplia que los espacios de Peano cambiando compacidad por compacidad local:

Definición 5.11. Decimos que un espacio X es un continuo generalizado de Peano si es metrizable, conexo, localmente conexo y localmente compacto.

El principal resultado de esta sección será que todos los continuos generalizados de Peano son imágenes continuas de $\mathbb{R}$. El concepto de continuos generalizados de Peano lo encontré en [ACQ98]. Según dice ese artículo, Mazurkiewicz demostró este resultado en [Ma20], aunque la siguiente demostración es original. Será análoga a la prueba de la sección anterior de que los continuos de Peano son imágenes continuas de **I**.

Para que un espacio generalizado de Peano sea imagen continua de $\mathbb{R}$ es necesario que sea conexos por caminos, lo cual probamos en el siguiente lema:

Lema 5.12. *Si X es un continuo generalizado de Peano y U un abierto conexo de X con $\overline{U}$ compacto. Entonces U es conexo por arcos.*

Demostración. Como U es localmente conexo por serlo X, tendrá un recubrimiento por abiertos conexos de diámetro < 1 cuyos cierres están contenidos en U. Por tanto, el lema 5.4 nos dice que dados dos puntos a y b de U, habrá una cadena simple $\mathfrak{C}_1$ desde a hasta b de abiertos conexos en U de diámetro < 1.

A partir de aquí podemos continuar el argumento igual que en la demostración de 5.5 para obtener un arco desde a hasta b en U. La única diferencia es que como ahora X no tiene por qué ser compacto, hemos tenido que considerar un abierto U de cierre compacto para que los conjuntos C_k sean compactos. □

Corolario 5.13. *Cualquier continuo generalizado de Peano X es localmente conexo por caminos, y por tanto conexo por caminos (o arcos).*

Demostración. Cualquier $x \in X$ tiene una base de entornos conexos con cierre compacto. □

Una condición que tendrá que cumplir cualquier imagen continua de la recta real es ser σ-compacto, es decir, ser una unión numerable de subespacios compactos. Esto pasa porque si $f : \mathbb{R} \to X$ es sobreyectiva, $\{f([-n, n])\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de compactos que recubre X. Que los continuos generalizados de Peano son σ-compactos es una consecuencia del siguiente resultado (un lema en la página 460 de [Sp99]):

Lema 5.14. *Si X es un espacio métrico conexo y localmente compacto, entonces X es σ-compacto.*

Demostración. Como X es métrico, será paracompacto por 0.2.

Por tanto tenemos un recubrimiento localmente finito de abiertos de cierre compacto, $\mathcal{U}$. Sea $U_0 \in U$. Entonces $\overline{U_0}$, por ser compacto, solo puede intersecar finitos elementos de $\mathcal{U}$, que llamaremos $U_1, \ldots, U_{n_1}$. De forma similar, $\overline{U_0} \cup \cdots \cup \overline{U_1}$ solo interseca finitos elementos de $\mathcal{U}$, que llamamos $U_{n_1+1}, \ldots, U_{n_2}$. Podemos repetir este proceso infinitas veces, obteniendo una sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde el cierre de cada elemento está contenido en la unión de finitos otros elementos. Por tanto podemos considerar la unión:

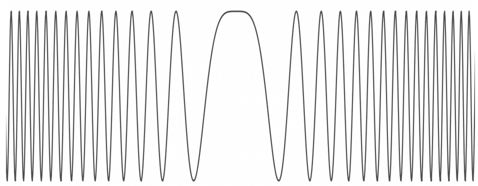
$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{U_n}$$

U es claramente abierto, y es cerrado por ser $\left\{\overline{U_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ localmente finito. Por tanto tenemos $U = X$, y por definición de U, X es unión numerable de compactos. □

Corolario 5.15. *Los continuos generalizados de Peano son σ-compactos (y por tanto, separables).* □

Ahora procedemos a dar una demostración de que los continuos generalizados de Peano son imágenes continuas de $\mathbb{R}$, similar en espíritu a la demostración de que todo continuo de Peano es imagen continua de $[0, 1]$. Primero recubriremos nuestro espacio con las imágenes de numerables copias del conjunto de Cantor, que pueden introducirse en la recta real sin problema. Después buscaremos una forma de extender la función a toda la recta real de forma continua.

Aquí encontramos un problema, y es que a diferencia de los continuos de Peano, los continuos generalizados de Peano no tienen por qué ser uniformemente localmente conexos por caminos (5.8), como demuestra la gráfica de la función $\cos(x^2)$ de la figura, que es un continuo generalizado de Peano pero no cumple esa propiedad. Afortunadamente podemos encontrar una propiedad más débil que sigue permitiéndonos extender la función:



Lema 5.16. *Si X es un continuo generalizado de Peano y C es un subespacio compacto de X, C es uniformemente localmente conexo por arcos respecto a X, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ hay δ tal que si $x, y \in C$ y $d(x, y) < \delta$, entonces hay un arco en X que une x e y de diámetro $< \varepsilon$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como cada punto de X tiene una base de entornos conexos de cierre compacto, por 5.12 habrá un recubrimiento de X por abiertos conexos por arcos de diámetro $< \varepsilon$, $\mathcal{B}$. Llamando $\mathcal{B}_C = \{B \cap C; B \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{B}_C$ es un recubrimiento abierto de C. Por tanto su número de Lebesgue δ cumple el enunciado, ya que si $x, y \in C$ cumplen $d(x, y) < \delta$, entonces x e y están en un mismo elemento de $\mathcal{B}$, y hay un arco en X entre x e y de diámetro $< \varepsilon$. □

Pasamos ya a enunciar el teorema final, cuya demostración será muy parecida a la de 5.10.

Teorema 5.17. *Sea X un continuo generalizado de Peano. Entonces hay una función continua sobreyectiva $f : \mathbb{R} \to X$.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor, sea $\mathcal{C} + x = \{x + y; y \in \mathcal{C}\}$, consideramos el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por infinitos conjuntos de Cantor con huecos entre ellos:

$$D = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} C + 2n$$

Entonces podemos encontrar una función continua sobreyectiva $g : D \to X$. En efecto, el lema 5.14 nos dice que X es una unión numerable de compactos $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, y por el Teorema de Hausdorff-Alexandroff 1.12 hay una función $g_n : \mathcal{C} + n \to C_n$ continua sobreyectiva, y definimos nuestra g de modo que $g|_{\mathcal{C}+n} = g_n$.

Vamos a definir nuestra función $f : \mathbf{R} \to X$ continua, que será una extensión de g (y por tanto, sobreyectiva). De nuevo, solo tenemos que definir f en una sucesión de intervalos $I_n = (p_n, q_n)$, que son los huecos de D en la recta real. En el intervalo I_n definiremos f como un arco desde $g(p_n)$ hasta $g(q_n)$. Para que f sea continua, igual que en la prueba de 5.10, habrá que imponer una condición sobre los diámetros de $f(I_n)$:

Dados dos puntos $a, b \in X$, definimos $\varrho(a, b)$ como el ínfimo de los diámetros de los arcos de a a b. Entonces definimos f en I_n como un arco desde $g(p_n)$ hasta $g(q_n)$ con diámetro $< 2\varrho(p_n, q_n)$. La continuidad de f es obvia en los puntos interiores de los intervalos I_n, osea que queda comprobar que f es continua en los puntos de D.

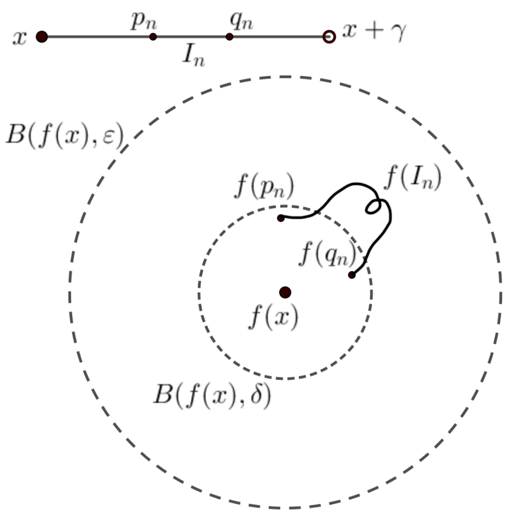


Figura 5.2: El diámetro de $f(I_n)$ es $< \frac{\varepsilon}{2}$, ergo $f(I_n) \subseteq B(f(x), \delta + \frac{\varepsilon}{2}) \subseteq B(f(x), \varepsilon)$.

Dado $x \in D$, veamos que f es continua por la derecha en x (la continuidad por la izquierda es simétrica). Si x es el inicio de un intervalo I_n, $x = p_n$, el resultado es obvio ya que f es continua en $[p_n, q_n]$. En el caso contrario, habrá infinitos intervalos I_n que se aproximan a x por la derecha. Este caso llevará algo más de trabajo, la figura 5.2 lo explica geométricamente.

Sea $\varepsilon > 0$ de forma que $\overline{B(f(x),\varepsilon)}$ es compacto. Entonces, por el lema 5.16, habrá $\delta > 0$ tal que si $a, b \in \overline{B(f(x),\varepsilon)}$ y $d(a,b) < 2\delta$, entonces hay arcos desde a a b de longitud $< \frac{\varepsilon}{4}$. En concreto, si tenemos extremos (p_n, q_n) tales que $f(p_n)$ y $f(q_n)$ están en $B(f(x),\delta)$, entonces el diámetro de $f(I_n)$ será $< \frac{\varepsilon}{2}$. Obviamente podemos suponer $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, por continuidad de g, podemos coger γ de forma que si un intervalo I_n interseca $(x, x+\gamma)$, entonces las imágenes de sus extremos, $f(p_n)$ y $f(q_n)$, están en $B(f(x),\delta)$. Habremos acabado si vemos que cualquier $y \in (x, x+\gamma)$ cumple $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

- Si $y \in D$ entonces como $d(x,y) < \gamma$, por continuidad de g tenemos que $d(f(x), f(y)) \leq \delta < \varepsilon$.

- Si no, y está en un intervalo $I_n = (p_n, q_n)$, con $f(p_n)$ y $f(q_n)$ en $B(f(x),\delta)$. Por tanto, $f(I_n)$ tiene diámetro $< \frac{\varepsilon}{2}$, ergo $d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(p_n)) + d(f(p_n), f(y)) < \delta + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. □

5.3 Una caracterización de $\mathbb{R}$

Esta sección también es original. Usando los resultados de la sección anterior, podemos demostrar una caracterización de $\mathbb{R}$. Para ello usamos un nuevo concepto:

Definición 5.18. Decimos que x es un punto de corte fuerte de X si $X - \{x\}$ tiene 2 componentes conexas.

En $\mathbb{R}$, todos los puntos son puntos de corte son fuertes. De hecho, el teorema principal de esta sección dice que esto caracteriza a $\mathbb{R}$ entre los continuos de Peano generalizados:

Teorema 5.19. *Si X es un continuo de Peano generalizado y todos sus puntos son puntos de corte fuertes, entonces X es homeomorfo a $\mathbb{R}$.*

Esto será consecuencia de los lemas que desarrollamos a continuación, que tienen un carácter bastante geométrico. El siguiente lema tiene el propósito de descartar que nuestros espacios puedan tener subespacios homeomorfos a circunferencias.

Lema 5.20. *Si X es conexo, todo punto de X es un punto de corte fuerte y X contiene un subespacio A no numerable conexo sin puntos de corte, entonces X no es separable.*

Demostración. Para cada punto a de A, $X - \{a\}$ tiene dos componentes conexas. Una de ellas, que llamamos B_a, contiene a $A - \{a\}$ por ser $A - \{a\}$ conexo. Llamamos a la otra C_a. Veamos que si a, b son puntos distintos de A, entonces C_a y C_b son disjuntos. Esto pasa porque si compartieran un punto c, entonces $C_a \cup C_b$ sería conexo. Por tanto $C_a \cup C_b \cup \{b\}$ sería conexo, ya que b está en la frontera de C_b. Esto es imposible, ya que $C_a \cup C_b \cup \{b\}$ es un subconjunto de $X - \{a\}$ que contiene puntos de B_a y de C_a.

Por tanto $\{C_a\}_{a \in A}$ es un conjunto no numerable de abiertos disjuntos, ergo X no es separable. □

Lema 5.21. *Si X es conexo métrico separable y todo punto de X es un punto de corte fuerte, no puede haber dos arcos distintos entre dos puntos. Es decir, dados $a, b \in X$ y dos arcos $f, g : [0,1] \to X$ desde a hasta b, entonces $f([0,1]) = g([0,1])$.*

Demostración. Supongamos si no que hay cierto c con $f(c) \notin g([0,1])$. Sea ahora el intervalo maximal (a, b) entorno a c tal que $f((a,b))$ no interseca $g([0,1])$. Entonces $f(a)$ y $f(b)$ son distintos por ser f inyectiva, y están en $g([0,1])$, así que hay a' y b' con $f(a) = g(a')$ y $f(b) = g(b')$. Entonces $f|_{[a,b]}$ y $g|_{[a',b']}$ (o $g|_{[b',a']}$, si $a' > b'$) son dos arcos desde $f(a)$ hasta $f(b)$ que solo se encuentran en sus extremos. Por tanto, la unión $f([a,b]) \cup g([a',b'])$ (o $g([b',a'])$) es homeomorfa a una circunferencia, es decir, un subespacio de X no numerable conexo sin puntos de corte. Como esto contradice el lema anterior, hemos acabado. □

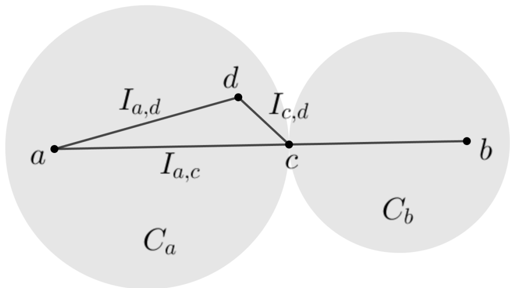
Dados tres puntos a_1, a_2, a_3 en un espacio X y dos arcos $f_{1,2}, f_{2,3} : [0,1] \to X$ desde a_1 hasta a_2 y desde a_2 hasta a_3 respectivamente, podemos obtener un arco desde a_1 hasta a_3 contenido en la unión de los anteriores. Esto es obvio si a_1 está en la imagen de $f_{2,3}$ o a_3 está en la imagen de $f_{1,2}$. Si no, sea el máximo k tal que $f_{1,2}([0,k))$ no interseca la imagen de $f_{2,3}$, y sea k' tal que $f_{1,2}(k) = f_{2,3}(k')$. Entonces la composición de caminos $f_{1,2}|_{[0,k]} \bullet f_{2,3}|_{[k',1]}$ es un arco desde a_1 hasta a_3. Por tanto podemos dar la siguiente definición:

Definición 5.22. Dados dos arcos $f, g : [0,1] \to X$ de imágenes I_f e I_g, con $f(1) = g(0)$, llamamos $I_f \wedge I_g$ a la imagen de un arco desde $f(0)$ hasta $g(1)$, de forma que $I_f \wedge I_g \subseteq I_f \cup I_g$. Para evitar ambiguedades, podemos tomar el arco $I_f \wedge I_g$ construido como en el párrafo anterior.

Lema 5.23. *Todo continuo generalizado de Peano cuyos puntos son todos puntos de corte fuertes es localmente 1-euclideo (es decir, todo punto suyo tiene un entorno homeomorfo a $\mathbb{R}$).*

Demostración. Sea X continuo generalizado de Peano, sea $c \in X$ un punto suyo cualquiera que lo separa en dos abiertos, C_a y C_b, y sean dos puntos $a \in C_a$ y $b \in C_b$. Como X es conexo por arcos, hay un arco desde a hasta b, de imagen I_{ab}. Como I_{ab} es conexo, C_a y C_b no pueden separarlo, por tanto pasa por c. Nos basta ver entonces que $I_{ab} - \{a, b\}$ contiene un entorno de c, ya que $I_{ab} - \{a, b\}$ es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Supongamos que no es así. Entonces, por el lema 5.16, hay un punto d en $X - I_{ab}$ cercano a c de forma que hay un arco de c a d, I_{cd}, de diámetro $< \min(d(a,c), d(b,c))$. En concreto, $a, b \notin I_{c,d}$. Suponemos $d \in C_a$ (el caso $d \in C_b$ es simétrico). Entonces, como C_a es un continuo generalizado de Peano por ser abierto conexo en X, hay un arco $I_{a,d}$ desde a hasta d en C_a.



Tenemos entonces tres arcos, $I_{a,d}$, $I_{a,c}$ (parte del arco $I_{a,b}$) e $I_{c,d}$, uniendo dos a dos los tres puntos a, c, d, y de forma que $I_{a,d}$ no pasa por c, $I_{a,c}$ no pasa por d e $I_{c,d}$ no pasa por a. Veamos que esta situación no puede darse. El arco $I_{a,c} \wedge I_{c,d}$ es un arco desde a hasta d, por tanto por 5.21, $I_{a,d} = I_{a,c} \wedge I_{c,d}$, ergo $I_{a,d} \subseteq I_{a,c} \cup I_{c,d}$. Como por ser conexo, el arco $I_{a,d}$ no tiene una partición en dos subconjuntos cerrados no vacíos, $I_{a,d} \cap I_{a,c}$ y $I_{a,d} \cap I_{c,d}$ no son disjuntos, de modo que hay un punto P en $I_{a,d} \cap I_{a,c} \cap I_{c,d}$. Por tanto P no puede ser c, d ni a. P divide a X en dos componentes conexas, X_1 y X_2. En una de ellas hay dos puntos de a, c, d, pongamos por ejemplo que a, c están en X_1. Entonces por ser X_1 un continuo generalizado de Peano, hay un arco desde a hasta c en X_1. Este arco no contiene a P, por tanto tiene imagen distinta de $I_{a,c}$, lo cual contradice 5.21. $\square$

Demostración del Teorema 5.19. X será localmente 1-euclideo, conexo, separable (por 5.15) y T_2, por tanto por el teorema de clasificación de 1-superficies 0.3, o bien es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$ o a $\mathbb{R}$. Como tiene puntos de corte, será homeomorfo a $\mathbb{R}$. $\square$

Hemos demostrado entonces que cualquier espacio métrico, conexo, localmente conexo y localmente compacto tal que todos sus puntos son puntos de corte fuerte es homeomorfo a $\mathbb{R}$. En la literatura hay caracterizaciones de $\mathbb{R}$ mediante condiciones aparentemente bastante más débiles, por ejemplo en [FK70] se demuestra que todo espacio X separable, regular, conexo, localmente conexo tal que todos sus puntos son de corte fuertes es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Sin embargo para omitir la condición de compacidad local hay que pararse a hacer un estudio mucho más detallado de los puntos de corte, que no se puede incluir aquí por cuestiones de espacio.

Anexo A

Una homogeneidad más fuerte

Los métodos que hemos usado para demostrar la homogeneidad por numerables densos de $\mathcal{C}, \mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$ se pueden refinar para obtener una propiedad más fuerte que la homogeneidad por numerables densos. Como consecuencia obtendremos una propiedad de homogeneidad similar para $\mathbb{Q}$ (a pesar de que $\mathbb{Q}$ no es homogéneo por numerables densos). El contenido de este anexo es original, que yo sepa. La propiedad que vamos a considerar es la siguiente:

Definición A.1. Decimos que un espacio X separable es ω-homogéneo por numerables densos si dada una sucesión A_n de numerables densos en X disjuntos dos a dos, y otra sucesión B_n de la misma forma, entonces hay un homeomorfismo $f : X \to X$ con $f(A_n) = B_n$ para todo n.

Para demostrar que $\mathcal{C}$ tiene esta propiedad, consideraremos el siguiente espacio homeomorfo a $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}' = \prod_{n=1}^{\infty} K_n, \text{ con } K_n = \{1, \dots, n\}$$

es decir, $\mathcal{C}'$ es el espacio de sucesiones $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $s_n \in \{1, \dots, n\}$, con la topología producto.

Para dar una base de $\mathcal{C}'$ consideramos el conjunto Γ de sucesiones finitas $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ con $1 \leq \xi_i \leq i\ \forall i$. Entonces una base de abiertos de $\mathcal{C}'$ está formada por, para cada $\xi \in \Gamma$, el abierto B_ξ de todas las sucesiones de $\mathcal{C}'$ que empiezan por ξ.

Ahora, podemos definir para $n \geq 1$ los siguientes subconjuntos de $\mathcal{C}'$:

$$D_n = \{s \in \mathcal{C}';\ (s_k) \text{ es eventualmente } n\}$$

Los D_n son subespacios numerables densos de $\mathcal{C}'$, y desde luego son disjuntos dos a dos. El teorema que pretendemos probar es el siguiente:

Teorema A.2. *Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios numerables densos de $\mathcal{C}$ disjuntos dos a dos. Entonces hay un homeomorfismo $f : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ con $f(D_n) = E_n$ para todo n.*

Demostración. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base de conjuntos clopen de $\mathcal{C}$. Para cada E_n damos una enumeración $(x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$. Ahora, para cada subconjunto abierto Y de $\mathcal{C}$, definimos $e_{Y,n}$ como el primer elemento de E_n que pertenece a Y (según la enumeración de E_n que hemos dado).

De forma similar a la prueba de 1.6, vamos a definir un conjunto I_ξ para cada $\xi \in \Gamma$. La intención será construir la función f del enunciado, de forma que $f(B_\xi) = I_\xi$ para todo ξ. Los I_ξ cumplirán estas propiedades:

(1) Para todo $\xi \in \Gamma$, I_ξ es un subconjunto clopen no vacío de $\mathcal{C}$ (por tanto es homeomorfo a $\mathcal{C}$).

(2) Si ξ tiene longitud n, entonces los $I_{\xi\wedge(i)}$ con $i = 1, \dots, n+1$ forman una partición de I_ξ. Además, para i entre 1 y n, $I_{\xi\wedge(i)}$ contiene el punto $e_{I_\xi,i}$.

(3) Si ξ tiene longitud n, I_ξ o bien está contenido en A_n o es disjunto con A_n.

Definiremos los I_ξ recursivamente, en el caso base definimos $I_{(1)} = \mathcal{C}$. Ahora, supongamos que hemos definido I_ξ clopen no vacío para cierta ξ de longitud n, con $n \geq 1$, y vamos a definir $I_{\xi\wedge(i)}$ para $i = 1, \ldots, n+1$.

Para i entre 1 y n definimos $I_{\xi\wedge(i)}$ como un entorno clopen de $e_{I_\xi,i}$ contenido en I_ξ, de forma que los $I_{\xi\wedge(i)}$ desde 1 a n son disjuntos 2 a 2, cada uno de ellos está contenido en A_n o es disjunto con A_n y no recubren $I_\xi \cap A_n$ ni $I_\xi \setminus A_n$. Ahora, si $e_{I_\xi,1}$ está en A_n, cambiamos $I_{\xi\wedge(1)}$ a $(I_\xi \cap A_n) \setminus \cup_{i=2}^n I_{\xi\wedge(i)}$ (sigue siendo un entorno de $e_{I_\xi,1}$), y definimos $I_{\xi\wedge(n+1)}$ como $I_\xi \setminus \cup_{i=1}^n I_{\xi\wedge(i)}$. Si, por el contrario, $e_{I_\xi,1}$ no está en A_n, cambiamos $I_{\xi\wedge(1)}$ a $(I_\xi \setminus A_n) \setminus \cup_{i=2}^n I_{\xi\wedge(i)}$, y definimos $I_{\xi\wedge(n+1)}$ como $I_\xi \setminus \cup_{i=1}^n I_{\xi\wedge(i)}$.

Entonces, por cómo los hemos construido está claro que los I_ξ cumplen las propiedades (1), (2) y (3). Además, se cumplirán estas otras propiedades:

(4) Para todo n, $\{I_\xi; \xi \in \Gamma$ de longitud $n\}$ es una partición de $\mathcal{C}$ en $n!$ conjuntos clopen.

(5) Para cada $(a_n) \in \mathcal{C}'$, $I_{a|_n}$ es una sucesión decreciente de cerrados tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{a|_n}$ tiene 1 punto.

En efecto (4) es directo por inducción y por (2), mientras que dada $(a_n) \in \mathcal{C}'$, por construcción $I_{a|_{n+1}}$ está contenido en $I_{a|_n}$ para todo n, así que los $I_{a|_n}$ forman una sucesión decreciente. Su intersección es no vacía porque es una cadena de cerrados en $\mathcal{C}$ (que es compacto) con la propiedad de la intersección finita. Ahora supongamos que $x \neq y$ están ambos en $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_{a|_n}$. Pero habrá algún N tal que $x \in A_N, y \notin A_N$. Así que x, y no pueden estar ambos en $I_{a|_N}$ por (3), absurdo.

Entonces, ya podemos definir nuestra f:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathcal{C}' & \to & \mathcal{C}; \\ & (a_n) & \mapsto & y \end{array}, \text{ donde } \{y\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{a|_n}.$$

f está bien definida por (5). Vamos a probar el enunciado por partes:

a) $f(B_\xi) \subseteq I_\xi$ para todo ξ. Es obvio por la definición de f.

b) f es inyectiva y continua. Si $a = (a_n)$ y $b = (b_n)$ son dos sucesiones distintas de $\mathcal{C}'$ y el primer término en el que difieren es $a_N \neq b_N$, entonces $I_{a|_N}$ e $I_{b|_N}$ son disjuntos por (4), así que $f(a) \neq f(b)$. Para ver que f es continua, sea $a = (a_n) \in \mathcal{C}'$ y sea A_k un entorno de $f(a)$ de la base de $\mathcal{C}$. Entonces por a), $f(a) \in f(B_{a|_k}) \subseteq I_{a|_k}$, por tanto como $f(a) \in A_k \cap I_{a|_k}$, por (3) tenemos que $I_{a|_k} \subseteq A_k$. Así que el entorno $B_{a|_k}$ de a cumple que $f(B_{a|_k}) \subseteq A_k$.

c) f es un homeomorfismo. Como $\mathcal{C}'$ es compacto y $\mathcal{C}$ es T_2, basta ver que f es sobre. Dado $x \in \mathcal{C}$, podemos construir por recursión una sucesión (a_n) tal que $x \in I_{a|_n}$ para todo n. Osea que $x = f((a_n))$, y f es sobre.

d) $f(D_n) = E_n$ para todo n. Vamos a comprobar esto para un n fijo. Veamos $f(D_n) \supseteq E_n$. Dado $x \in E_n$, sea $a = (a_i)$ la sucesión tal que $x = f(a) = \bigcap_{i=1}^{\infty} I_{a|_i}$. Como la intersección de los $I_{a|_i}$ es un solo punto, habrá $N > n+1$ tal que $I_{a|_N}$ no contiene puntos de E_n anteriores a x en la enumeración de E_n. Es decir, $x = e_{I_{a|_N},n}$. Por tanto usando (2) tenemos que $x \in I_{a|_N\wedge(n)}$, por lo que como también $x \in I_{a|_{N+1}}$, tenemos que $a_{N+1} = n$. Además, x es el primer punto de E_n en $I_{a|_{N+1}}$. Así continuamos con un argumento inductivo viendo que $a_i = n$ y $x \in I_{a|_i}$ para todo $i > N$, de forma que a_i es n a partir de cierto i, así que $a \in D_n$.

Ahora veamos $f(D_n) \subseteq E_n$. Dada $a = (a_i) \in D_n$, hay $N > n+1$ tal que $a_i = n$ para $i \geq N$. Entonces, llamo $x = e_{I_{a|_N},n} \in E_n$, y nos basta ver que $x = f(a)$. Esto pasa ya que, como $x = e_{I_{a|_N},n}$ y $a_{N+1} = n$, tendremos por (2) que $x \in I_{a|_{N+1}}$, y también se cumple que $x = e_{I_{a|_{N+1}},n}$, y por inducción vemos que $x \in I_{a|_i}$ para todo $i \geq N$ así que $x = f(a)$.

□

Corolario A.3. *$\mathcal{C}$ es ω-homogéneo por numerables densos.* □

Corolario A.4. *$\mathbb{I}$ es ω-homogéneo por numerables densos.*

Demostración. Por 2.12, $\mathbb{I}$ es homeomorfo al complementario de cualquier subconjunto numerable denso de $\mathcal{C}$ (ya que dicho complementario será completamente metrizable por ser G_δ en $\mathcal{C}$ y no localmente compacto en ningún punto por 2.2). Llamo I a un subconjunto de $\mathcal{C}$ tal que $\mathcal{C} \setminus I$ es numerable denso en $\mathcal{C}$, y sean dos sucesiones $(A_n)_{n\geq 2}$ y $(B_n)_{n\geq 2}$ de numerables densos disjuntos dos a dos en I. Entonces podemos considerar (A_n) y (B_n) como sucesiones de numerables densos en $\mathcal{C}$, y poniendo $A_1 = B_1 = \mathcal{C} \setminus I$ y usando la ω-homogeneidad por numerables densos de $\mathcal{C}$, tenemos que I es ω-homogéneo por numerables densos. □

Corolario A.5. *Si A_n, B_n son sucesiones de numerables densos disjuntos en $\mathbb{Q}$ con $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, entonces hay un homeomorfismo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ con $f(A_n) = B_n$.*

Demostración. De forma similar al corolario anterior, consideramos $\mathbb{Q}$ como subconjunto numerable denso de $\mathcal{C}$ y aplicamos la ω-homogeneidad por numerables densos de $\mathcal{C}$. □

A continuación comprobamos que $\mathbb{R}$ también tiene esta propiedad de ω-homogeneidad por numerables densos. El camino para demostrarla va a ser el mismo que con la homogeneidad por numerables densos de $\mathbb{R}$, o sea que para empezar demostramos un lema sobre orden. Dado un conjunto ordenado X diremos que un subconjunto Y es denso en X si lo es con la topología del orden. En concreto, si X tiene un orden denso sin máximos ni mínimos e Y es denso en X, entonces hay elementos de Y en $(a, b), (a, \infty)$ e (∞, b) para cada $a, b \in X$ con $b > a$.

Lema A.6. *Sean A, B conjuntos ordenados que son orden-isomorfos a $\mathbb{Q}$, y sean A_n y B_n sucesiones de subconjuntos densos disjuntos dos a dos en A y B respectivamente, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = B$. Entonces hay un isomorfismo de orden $f : A \to B$ con $f(A_n) = B_n$ para todo n.*

Demostración. Construímos el isomorfismo recursivamente, de forma casi igual a 4.3. Antes un poco de notación: sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de A y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de B. Además, llamo $e(a_n)$ al único natural k tal que $a_n \in A_k$, y llamo $e(b_n)$ al único natural k tal que $b_n \in B_k$. Por tanto lo que nos pide el enunciado es un isomorfismo de orden $f : A \to B$ tal que $e(f(a_n)) = e(a_n)$ para todo n.

Vamos a construir f recursivamente. Comenzamos definiendo $f(a_1)$ como b_k, donde k es el menor natural tal que $e(b_k) = e(a_1)$. Y, si $f(a_1) \neq b_1$, definimos $f^{-1}(b_1)$ como a_k, donde k es el menor natural > 1 tal que $e(a_k) = e(b_1)$.

Ahora supongamos que ya hemos definido $f(a_1), \ldots, f(a_{n-1}), f^{-1}(b_1), \ldots, f^{-1}(b_{n-1})$ de forma que f es creciente e inyectiva en su dominio, y $e(f(a_n)) = e(a_n)$ para todo a_n en su dominio. Vamos a definir $f(a_n)$ y $f^{-1}(b_n)$. Si a_n no estaba ya en el dominio de f, definimos $f(a_n)$ como b_k, donde k es el menor índice tal que:

- Todavía no hemos definido $f^{-1}(b_k)$.
- Se cumple que $e(b_k) = e(a_n)$.
- Al definir $f(a_n) = b_k$, f sigue siendo creciente.

Tal k existirá porque $B_{e(a_n)}$ es denso en B, así que podemos encontrar elementos de $B_{e(a_n)}$ en cualquier intervalo de B. Ahora, de forma similar podemos definir $f^{-1}(b_n)$ (si b_n no estaba ya en la imagen) de forma que f siga siendo creciente e inyectiva y $e(f^{-1}(b_n)) = e(b_n)$ (esta vez usamos que $A_{e(b_n)}$ es denso en A).

Tras definir $f(a_n)$ y $f^{-1}(b_n)$ para cada n mediante este proceso, obtenemos una f inyectiva, creciente y con $e(f(a_n)) = e(a_n)$ para todo n, y además f es sobre porque hemos definido $f^{-1}(b_n)$ para todo n. Por tanto ya tenemos el isomorfismo de orden buscado. □

Teorema A.7. *La recta real $\mathbb{R}$ es ω-homogénea por numerables densos.*

Demostración. Sean A_n, B_n sucesiones de numerables densos disjuntos dos a dos en $\mathbb{R}$. Consideramos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces, A y B son también subconjuntos numerables densos de $\mathbb{R}$, de modo que por 4.3 son orden-isomorfos a $\mathbb{Q}$. Por el lema anterior, tenemos un isomorfismo de orden $g : A \to B$ con $g(A_n) = B_n$ para todo n. Además, en la demostración de 4.4 probamos que todo isomorfismo de orden entre dos subconjuntos numerables densos de $\mathbb{R}$ se puede extender a un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Así que, llamando f a esa extensión de g, ya tenemos un homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(A_n) = B_n$ para todo n. □

Anexo B

$2^{\aleph_0}$ subespacios distintos de $\mathbb{Q}$

Este apéndice se puede ver como una continuación a la sección 3.2. En dicha sección describimos no numerables subespacios de $\mathbb{Q}$ que no son homeomorfos dos a dos. Una pregunta natural es si habrá de hecho tantos subespacios de $\mathbb{Q}$ distintos bajo homeomorfismo como subconjuntos de $\mathbb{Q}$, es decir, $2^{\aleph_0}$. Si das por cierta la hipótesis del continuo ya hemos respondido a la pregunta, pero aún si no la das por cierta, no es difícil responder a esta pregunta de forma afirmativa. Para comprobarlo, recordamos estas definiciones de subconjuntos de $\mathbb{Q}$, para n natural (los primeros casos están representados en la figura de la sección 3.2).

$$\begin{cases} M_0 &= \{0\} \\ M_{n+1} &= \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2^i} + \frac{M_n}{2^{i+1}} \right\} \end{cases}$$

y añadimos una nueva clase muy similar de conjuntos. Para $n \geq 2$:

$$N_n = M_n \setminus \{\tfrac{1}{2^i}; i \in \mathbb{N}\}$$

Proposición B.1. *0 es un punto $n-1$-aislado de N_n.*

Demostración. M_n, con $n \geq 2$, está compuesto por el 0 y numerables copias de M_{n-1} que son clopen en M_n. Además, el 0 es un punto n-aislado en M_n, por tanto los puntos de forma $\frac{1}{2^i}$ son los puntos $n-1$-aislados en M_n (ya que corresponden a los ceros de las copias de M_{n-1} en M_n). Por tanto N_n se obtiene quitando a M_n sus puntos $n-1$-aislados. N_n tiene el 0 y copias de $M_{n-1} - \{0\}$ que son clopen en M_n. Como a su vez $M_{n-1} - \{0\}$ está compuesto por copias clopen de M_{n-2}, N_n se puede particionar en 0 y numerables copias de M_{n-2} clopen en N_n.

Por tanto en $N_n - \{0\}$, los puntos $n-2$-aislados son los ceros de las copias de M_{n-2}. Su único punto de acumulación en N_n es 0, por tanto en N_n, 0 es un punto $n-1$-aislado. □

Proposición B.2. *Para $n \geq 2$, M_n es compacto, y todo punto de N_n tiene entornos compactos salvo 0.*

Demostración. Ya vimos en la sección 3.2 que M_n es compacto. Sin embargo, N_n no lo es, ya que N_n no contiene los puntos $\frac{1}{2^i}$ pero contiene sucesiones que convergen a ellos en $\mathbb{R}$. En concreto, 0 no tiene ningún entorno compacto en N_n, aunque el resto de puntos de N_n sí tienen entornos compactos, ya que están contenidos en una copia de M_{n-2} que es clopen en N_n. □

De modo que ya podemos construir nuestros $2^{\aleph_0}$ subconjuntos distintos bajo homeomorfismo: basta construir un conjunto O_s para cada sucesión de ceros y unos $s = (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in 2^{\mathbb{N}}$. La construcción es sencillamente

$$O_s = \bigcup_{n \geq 2; s_n = 1} n + N_{n+1},$$

y por lo que hemos visto de N_n, O_s cumplirá que tendrá un punto n-aislado sin entornos compactos si y solo si $s_n = 1$, por tanto O_s no será homeomorfo a O_r si $s \neq r$.

Para encontrar estos espacios hemos creado para cada n dos tipos de puntos n-aislados distintos. En [Gi05] hay un estudio sobre los espacios numerables métricos y su teoría de tipos de sus puntos de acumulación.

Bibliografía

[ACQ98] R. Ayala, M. J. Chávez and A. Quintero. *A Hahn-Mazurkiewicz Theorem for generalized Peano continua.* Arch. Math. (Basel) 71 (1998) 325-330.

[Ba84] B. J. Ball. *Arcwise Connectedness and the Persistence of Errors.* Amer. Math. Monthly Vol. 91, No. 7 (1984), 431-433.

[Bl19] Aleksander Błaszczyk. *A Simple Proof of Sierpiński's Theorem.* Amer. Math. Monthly Vol 126, No.5 (1920), 464-466.

[Br10] L.E.J. Brouwer. *On the structure of perfect sets of points.* KNAW, Proceedings, 12 (1909-1910), 785-794.

[Br13] L.E.J. Brouwer. *Some remarks on the coherence type n.* KNAW, Proceedings, 15 II, 1912-1913, Amsterdam, 1913, 1256-1263.

[DS14] F. Dreher and T. Samuel. *Continuous Images of Cantor's Ternary Set.* Amer. Math. Monthly, Vol. 121, No. 7 (2014), 640-643.

[Eb77] Carl Eberhart. *Some remarks on the Irrational and Rational Numbers.* Amer. Math. Monthly, Vol. 84, No. 1 (1977), 32-35.

[En89] Ryszard Engelking. *General Topology. Revised and completed edition.* Heldermann Verlag Berlin, 1989.

[Fr12] Michael Francis. *Two Topological Uniqueness Theorems for Spaces of Real Numbers.* arXiv:1210.1008 (2012).

[Fr65] S. P. Franklin. *Spaces in which sequences suffice.* Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

[FK70] S.P. Franklin and G.V. Krishnarao. *On the topological characterization of the real line.* J. London Math. Soc, Vol 2, 4 (1970), 589-591.

[Gi05] W. D. Gillam. *Embeddability properties of countable metric spaces.* Topology Appl, Vol. 148, 1-3 (2005), 63-82.

[Ha37] F. Hausdorff. *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums.* Fund. Math. 29 (1937), 151-158.

[Ke95] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory.* 1995 Springer-Verlag New York, Inc.

[Le10] John. M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds. 2^{nd} edition.* Springer, 2010.

[Ma20] S. Mazurkiewicz. *Sur les lignes de Jordan.* Fund. Math. 1 (1920), 166-209.

[MS69] E. Michael, A. H. Stone. *Quotients of the space of irrationals.* Pacific J. Math. Vol 21, No. 3 (1969), 629-633.

[Ru69] Mary Ellen Rudin. *A new proof that metric spaces are paracompact.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 20, No. 2. (1969), 603.

[Sc74] Alan H. Schoenfeld. *Continuous surjections from Cantor Sets to compact metric spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol 46, No. 1 (1974), 141-142.

[SG75] Alan H. Schoenfeld, Gary Gruenhage. *An alternate characterization of the Cantor set.* Proc. Amer. Math. Soc. Vol 53, No. 1 (1975), 235-236.

[Si20] Waclaw Sierpinski. *Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables dense en soi.* Fund. Math. 1 (1920), 11-16.

[SW76] R. Sirois-Dumais and S. Willard. *Quotient-Universal Sequential Spaces.* Pacific J. Math, Vol. 66, No. 1 (1976), 281–284.

[Sp99] Michael Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vol. 1.* Publish or Perish (1999).

[Tr97] J.K. Truss. *Foundations of Mathematical Analysis.* Clarendon Press - Oxford, 1997.

[Wi70] Stephen Willard. *General Topology.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1970.