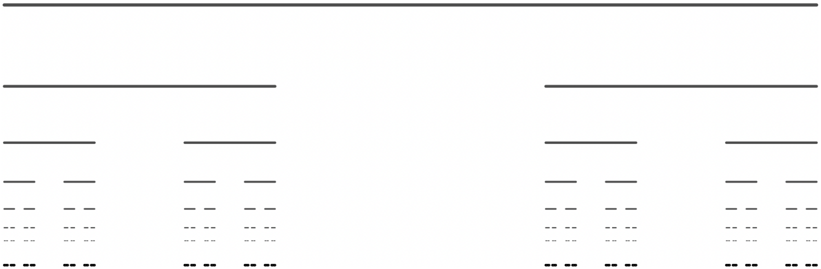
# Caracterizaciones topológicas de algunos de los subespacios singulares de la recta real. Aplicaciones importantes en Topología General

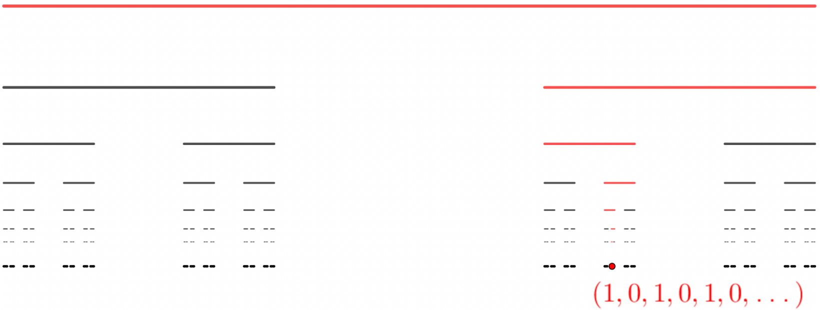
Saúl Rodríguez
Tutora: María Isabel Garrido Carballo

$\mathcal{C}$ $\quad\mathbb{I}\quad$ $\mathbb{Q}$ $\quad\mathbb{R}\quad$ $\mathbf{I}$

# $\mathcal{C}$ y $2^{\mathbb{N}}$

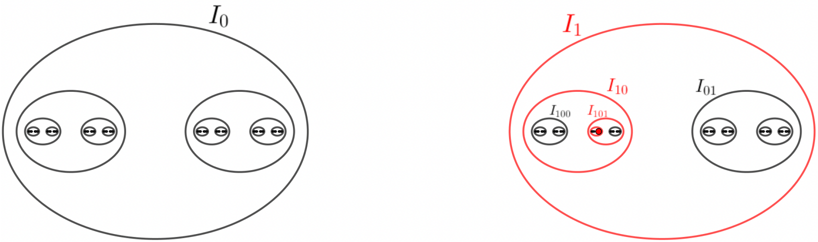


# $\mathcal{C}$ y $2^{\mathbb{N}}$



# Caracterización de $\mathcal{C}$ (Brouwer, 1910)

Sea $X$ un espacio métrico compacto, totalmente disconexo y sin puntos aislados. Entonces $X$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$.

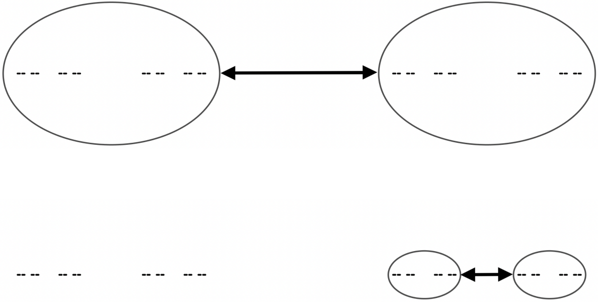


# $\mathcal{C}$ es homogéneo por numerables densos

Sean $A$ y $B$ subconjuntos numerables densos de $\mathcal{C}$. Entonces hay un homeomorfismo $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ con $f(A) = B$.

# $\mathcal{C}$ es homogéneo por numerables densos

Sean $A$ y $B$ subconjuntos numerables densos de $\mathcal{C}$. Entonces hay un homeomorfismo $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ con $f(A) = B$.



# Subespacios e imágenes continuas de $\mathcal{C}$

### Teorema de Hausdorff-Alexandroff (1927)

*Si $X$ es un espacio métrico compacto, entonces hay una función continua sobreyectiva $f : \mathcal{C} \to X$.*

### Subespacios de $\mathcal{C}$

*Un espacio es homeomorfo a algún subespacio de $\mathcal{C}$ si y solo si es $T_0$, de base numerable y 0-dimensional.*

# $\mathbb{I}$ y $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

-Si $X$ es completamente metrizable, separable, 0-dimensional y no es localmente compacto en ningún punto, entonces es homeomorfo a $\mathbb{I}$.
-Métrica completa en $\mathbb{I}$:

$$d(i_1, i_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \min\left(1\ ,\ |i_1 - i_2| + \left|\frac{1}{|i_1 - q_n|} - \frac{1}{|i_2 - q_n|}\right|\right)$$

-$\mathbb{I}$ es homogéneo por numerables densos.
-Un espacio es homeomorfo a algún subespacio de $\mathbb{I}$ si y solo si es $T_0$, de base numerable y 0-dimensional.
-Un espacio metrizable es una imagen continua de $\mathbb{I}$ si y solo si es un cociente de $\mathbb{I}$.

# El Teorema de Sierpinski (1920)

Todo espacio metrizable numerable sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

# El Teorema de Sierpinski (1920)

Todo espacio metrizable numerable sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

Demostración.
Sea $X$ metrizable numerable sin puntos aislados.
Por la caracterización de subespacios de $\mathcal{C}$, $X$ es homeomorfo a un subespacio $X'$ de $\mathcal{C}$.
Por la caracterización de $\mathcal{C}$, $\overline{X'}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$, así que $X$ es homeomorfo a un subconjunto numerable denso de $\mathcal{C}$.
Así que al ser $\mathcal{C}$ homogéneo por numerables densos, todos los espacios metrizables, numerables sin puntos aislados son homeomorfos. $\square$

# El Teorema de Sierpinski (1920)

Todo espacio metrizable numerable sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

Demostración.

Sea $X$ metrizable numerable sin puntos aislados.
Por la caracterización de subespacios de $\mathcal{C}$, $X$ es homeomorfo a un subespacio $X'$ de $\mathcal{C}$.
Por la caracterización de $\mathcal{C}$, $\overline{X'}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$, así que $X$ es homeomorfo a un subconjunto numerable denso de $\mathcal{C}$.
Así que al ser $\mathcal{C}$ homogéneo por numerables densos, todos los espacios metrizables, numerables sin puntos aislados son homeomorfos. $\square$

¡$\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q} \cap [0,1], \mathbb{A}, \mathbb{Q}_{[)}$ son homeomorfos a $\mathbb{Q}$!

# El Teorema de Sierpinski (1920)

Todo espacio metrizable numerable sin puntos aislados es homeomorfo a $\mathbb{Q}$.

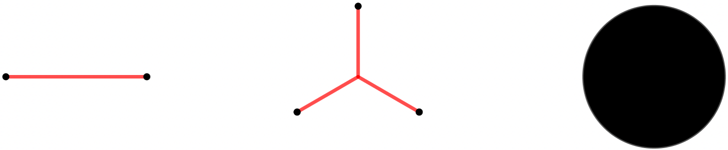
Demostración.
Sea $X$ metrizable numerable sin puntos aislados.
Por la caracterización de subespacios de $\mathcal{C}$, $X$ es homeomorfo a un subespacio $X'$ de $\mathcal{C}$.
Por la caracterización de $\mathcal{C}$, $\overline{X'}$ es homeomorfo a $\mathcal{C}$, así que $X$ es homeomorfo a un subconjunto numerable denso de $\mathcal{C}$.
Así que al ser $\mathcal{C}$ homogéneo por numerables densos, todos los espacios metrizables, numerables sin puntos aislados son homeomorfos. $\square$

¡$\mathbb{Q}^2, \mathbb{Q} \cap [0,1], \mathbb{A}, \mathbb{Q}_{[)}$ son homeomorfos a $\mathbb{Q}$!

Todo espacio numerable de base numerable es un cociente de $\mathbb{Q}$.

# Continuos

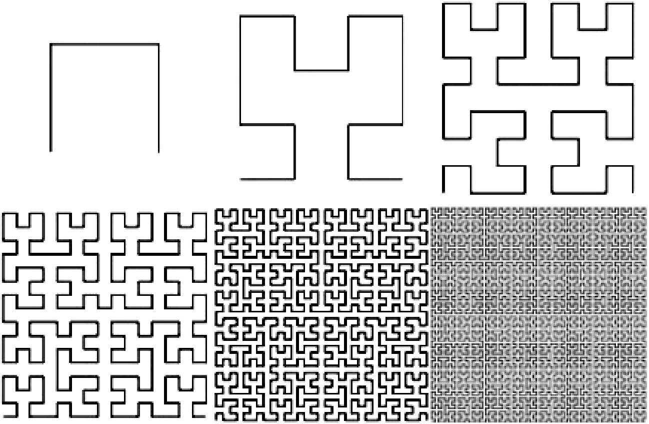
Un continuo es un espacio $\mathrm{T}_2$, compacto y conexo.
Un punto $p$ es un punto de corte de un espacio conexo $X$ si $X \setminus \{p\}$ es disconexo.



## Caracterización de I

*Un continuo metrizable con 2 puntos que no son de corte es homeomorfo a* $\mathrm{I}$.

# La curva de Hilbert



De modo que $I^2$ es una curva. ¿Qué más espacios son curvas?

# Continuos de Peano

Un continuo de Peano es un espacio metrizable, compacto, conexo y localmente conexo.

## Teorema de Hahn-Mazurkiewicz (1914)

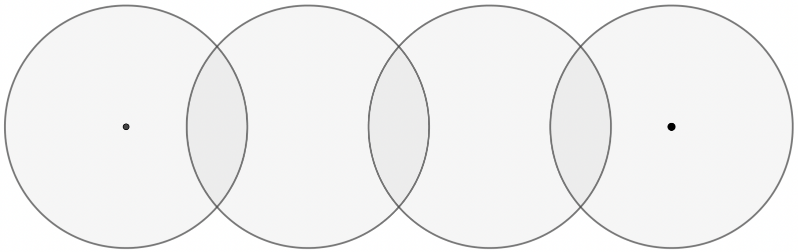
*Un espacio $T_2$ es una curva si y solo si es un continuo de Peano.*

$\Longrightarrow$ es fácil.

# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$ : Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

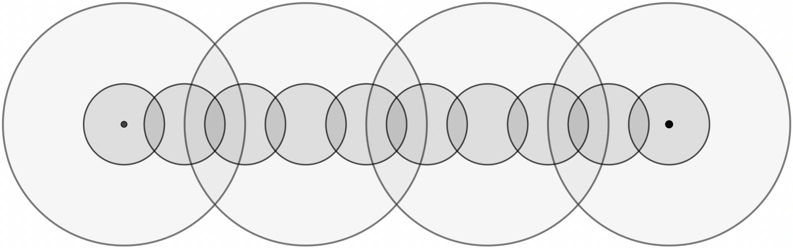
Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.



# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$ : Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

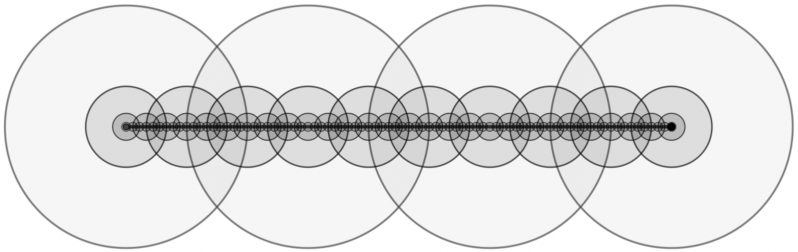
Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.



# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$ : Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.



-Si $K$ es un continuo metrizable y tiene exactamente 2 puntos que no son de corte, es homeomorfo a $\mathbb{I}$.

# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$ : Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.

Paso 2: Existe $g : \mathcal{C} \to X$ continua sobreyectiva.

# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$ : Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.

Paso 2: Existe $g : \mathcal{C} \to X$ continua sobreyectiva.

Paso 3: Extender $g$ a una función $f : \mathrm{I} \to X$ continua sobreyectiva.

# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$ : Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.

Paso 2: Existe $g : \mathcal{C} \to X$ continua sobreyectiva.

Paso 3: Extender $g$ a una función $f : \mathrm{I} \to X$ continua sobreyectiva.


# Teorema de Hahn-Mazurkiewicz

$\Longleftarrow$: Si $X$ es un continuo de Peano (metrizable, compacto, conexo y localmente conexo), entonces es una curva.

Paso 1: Cualquier continuo de Peano es conexo por arcos.

Paso 2: Existe $g : \mathcal{C} \to X$ continua sobreyectiva.

Paso 3: Extender $g$ a una función $f : \mathsf{I} \to X$ continua sobreyectiva.

**Resultado Extra**

*Un espacio $T_2$ es conexo por caminos si y solo si es conexo por arcos.*

# Continuos generalizados de Peano

Un continuo generalizado de Peano es un espacio metrizable, localmente compacto, conexo y localmente conexo.

## Teorema (Mazurkiewicz,1920)

*Todo continuo generalizado de Peano es una imagen continua de* $\mathbb{R}$.

## Caracterización de $\mathbb{R}$

*Todo continuo generalizado de Peano tal que todos sus puntos lo dividen en 2 componentes conexas es homeomorfo a* $\mathbb{R}$.