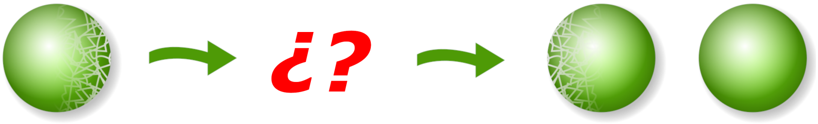
La paradoja de Banach-Tarski, en detalle

Saúl Rodríguez



Equidescomponibilidad

Diremos que dos espacios métricos A, B son (finitamente) equidescomponibles, $A \sim B$, si existen particiones de A y B,

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$$

$$B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_n$$

e isometrías $f_1, \ldots, f_n$ tales que $f_i(A_i) = B_i \ \forall i$.

- Si $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ y A_i es disjunto con B_i, entonces $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$.
- $\sim$ es una relación de equivalencia.

Equidescomponibilidad

$A \sim B$, si existen particiones de A y B,

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \cdots \sqcup A_n$$

$$B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \cdots \sqcup B_n$$

e isometrías $f_1, \ldots, f_n$ tales que $f_i(A_i) = B_i \ \forall i$.

Algunos ejemplos:

1. Un cuadrado es equidescomponible a un triángulo rectángulo isósceles.
2. $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
3. $\mathbb{S}^1 \sim \mathbb{S}^1 \setminus \{p\}$.
4. $\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$.
5. $\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{S}^2 \setminus N$, si N es numerable.

El Teorema de Banach-Tarski

Principales resultados que vamos a probar:

Paradoja (Hausdorff, Banach, Tarski)

Una bola cerrada de radio 1 es equidescomponible a dos bolas cerradas de radio 1.

Añadir el caso de dimensiones altas? Según vaya de tiempo.
Contar también qué pasa en dimensiones 1 y 2.

El Teorema de Banach-Tarski

Principales resultados que vamos a probar:

Paradoja (Hausdorff, Banach, Tarski)

Una bola cerrada de radio 1 es equidescomponible a dos bolas cerradas de radio 1.

Teorema (Banach, Tarski, 1924)

Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ *subconjuntos acotados con interior no vacío. Entonces* $A \sim B$.

Añadir el caso de dimensiones altas? Según vaya de tiempo. Contar también qué pasa en dimensiones 1 y 2.

El grupo libre $\mathbb{F}_2$

Sea X el conjunto de palabras que se pueden formar con los caracteres a, b, a^{-1}, b^{-1}.

$$X = \{e, a, b, a^{-1}, a^{-1}ab, b^3(= bbb), \dots\}$$

Decimos que $w \in X$ es *reducida* si no contiene las expresiones $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$. $\mathbb{F}_2$ será el conjunto de palabras reducidas de X. Por ejemplo, aa^{-1} o $abab^{-1}ba^{-2}$ no están en $\mathbb{F}_2$.

El producto de dos palabras reducidas $w = x_1 \dots x_n, w' = y_1, \dots, y_m$ se obtiene concatenando w y w': $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$, y eliminando todas las expresiones $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ hasta que no quede ninguna.

Ejemplo: si $w = a^2ba^{-2}b^{-1}$ y $w' = ba^4b^{-2}$, entonces $ww' = a^2ba^2b^{-2}$.

El grupo libre $\mathbb{F}_2$

Sea X el conjunto de palabras que se pueden formar con los caracteres a, b, a^{-1}, b^{-1}.

$$X = \{e, a, b, a^{-1}, a^{-1}ab, b^3(= bbb), \dots\}$$

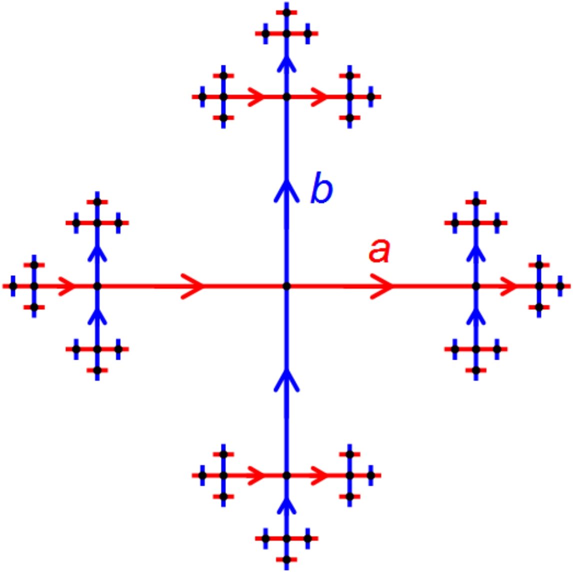
Decimos que $w \in X$ es *reducida* si no contiene las expresiones $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$. $\mathbb{F}_2$ será el conjunto de palabras reducidas de X. Por ejemplo, aa^{-1} o $abab^{-1}ba^{-2}$ no están en $\mathbb{F}_2$.

El producto de dos palabras reducidas $w = x_1 \dots x_n, w' = y_1, \dots, y_m$ se obtiene concatenando w y w': $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$, y eliminando todas las expresiones $aa^{-1}, a^{-1}a, bb^{-1}, b^{-1}b$ hasta que no quede ninguna.

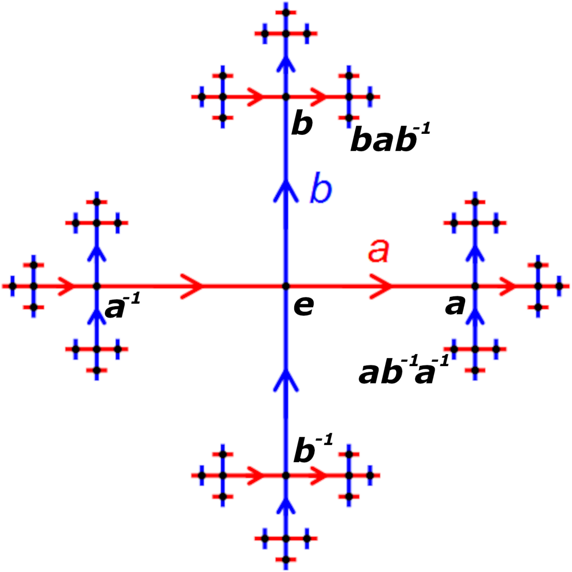
Teorema

El producto en $\mathbb{F}_2$ está bien definido y le da una estructura de grupo.

El grupo libre $\mathbb{F}_2$

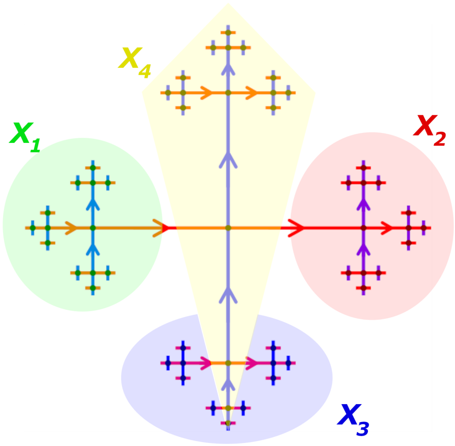


El grupo libre $\mathbb{F}_2$



El grupo libre $\mathbb{F}_2$

$\mathbb{F}_2$ es numerable. Además, tiene una partición en cuatro subconjuntos X_1, X_2, X_3, X_4 tales que $F_2 = X_1 \sqcup a^{-1}X_2 = X_3 \sqcup b^{-1}X_4$.



$\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$

Antes de probar que la bola es equidescomponible a dos copias de sí misma, empezamos con algo más sencillo:

Proposición

Existe un conjunto numerable $N \subseteq \mathbb{S}^2$ *tal que* $\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$. *Concretamente, hay una partición de* $\mathbb{S}^2 \setminus N$ *en cuatro subconjuntos* A, B, C, D *y dos rotaciones* r_1, r_2 *que fijan el origen de forma que* $\mathbb{S}^2 \setminus N = A \sqcup r_1(B) = C \sqcup r_2(D)$.

Para probar esto necesitaremos un lema técnico:

Lema

$SO(3)$ *tiene un subgrupo de rotaciones isomorfo a* $\mathbb{F}_2$. *En concreto podemos tomar el subgrupo* $G \leq SO(3)$ *generado por las rotaciones*

$$r_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$

Entonces tenemos una acción de $G =< r_1, r_2 >$ sobre $\mathbb{S}^2$.
Si llamamos $M = \{x \in \mathbb{S}^2; g(x) = g$ para algún $g \in G \setminus \{e\}\}$, M es numerable.
El conjunto $N = GM = \{gm; g \in G, m \in M\}$ también es numerable, ya que M y G lo son.

Proposición

G actúa libremente sobre $\mathbb{S} \setminus N$, es decir, si $g \in G$ y $g(x) = x$ para cierto $x \in \mathbb{S} \setminus N$ entonces $g = e$.

Es decir, dado $x \in \mathbb{S}^2 \setminus N$, la función $G \to Gx$ dada por $g \mapsto g(x)$.
Así que podemos pensar en $\mathbb{S}^2 \setminus N$ como una unión disjunta de copias de G.

$\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$

Demostración de que $\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$

Como G es isomorfo a $\mathbb{F}_2$, podemos particionar G en cuatro conjuntos Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 de forma que

$$G = Y_1 \sqcup Y_2 \sqcup Y_3 \sqcup Y_4 = Y_1 \sqcup r_1 Y_2 = Y_3 \sqcup r_2 Y_4.$$

Ahora, elegimos un conjunto $T \subseteq \mathbb{S}^2$ que contiene un elemento de cada órbita de la acción de G sobre $\mathbb{S}^2 \setminus N$ (!).
Para cada punto $t \in T$, se cumple que

$$Gt = Y_1 t \sqcup Y_2 t \sqcup Y_3 t \sqcup Y_4 t = Y_1 t \sqcup r_1 Y_2 t = Y_3 t \sqcup r_2 Y_4 t.$$

$\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$

Demostración de que $\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$

Ahora, elegimos un conjunto $T \subseteq \mathbb{S}^2$ que contiene un elemento de cada órbita de la acción de G sobre $\mathbb{S}^2 \setminus N$ (!).
Para cada punto $t \in T$, se cumple que

$$Gt = Y_1 t \sqcup Y_2 t \sqcup Y_3 t \sqcup Y_4 t = Y_1 t \sqcup r_1 Y_2 t = Y_3 t \sqcup r_2 Y_4 t.$$

Por tanto

$$GT = Y_1 T \sqcup Y_2 T \sqcup Y_3 T \sqcup Y_4 T = Y_1 T \sqcup r_1 Y_2 T = Y_3 t \sqcup r_2 Y_4 T.$$

Pero $GT = \mathbb{S}^2 \setminus N$, por tanto llamando
$A = Y_1, B = Y_2, C = Y_3, D = Y_4$, tenemos que

$$\mathbb{S}^2 \setminus N = A \sqcup B \sqcup C \sqcup D = A \sqcup r_1(B) = C \sqcup r_2(D).$$

Demostración de la paradoja de Banach-Tarski

Definición

Dado $X \subseteq \mathbb{S}^2$, definimos $X' := \{kp; p \in X, k \in (0,1]\}$.

- $X = X_1 \sqcup X_2 \implies X' = X_1' \sqcup X_2'$.
- $r(X') = r(X)'$ si r es una rotación de $\mathbb{R}^3$ (que fija el origen).

Usando estas dos propiedades anteriores obtenemos la proposición:

Proposición

Si $X, Y \subseteq \mathbb{S}^2$, $X \sim Y$ y en la equidescomposición solo usamos rotaciones, entonces $X' \sim Y'$.

Por tanto, como $\mathbb{S}^2 \equiv \mathbb{S}^2 \setminus N$,

$$\mathbb{B}^3 \setminus \{0\} = (\mathbb{S}^2)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)'.$$

La descomposición que hemos construido usa ≤ 256 piezas, pero se puede hacer con 5 piezas.

Demostración de la paradoja de Banach-Tarski

Proposición

Si $X, Y \subseteq \mathbb{S}^2$, $X \sim Y$ y en la equidescomposición solo usamos rotaciones, entonces $X' \sim Y'$.

Por tanto, como $\mathbb{S}^2 \equiv \mathbb{S}^2 \setminus N$,

$$\mathbb{B}^3 \setminus \{0\} = (\mathbb{S}^2)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)'.$$

Por otra parte, como al probar que $\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$ también hemos usado solo rotaciones, tenemos que $(\mathbb{S}^2 \setminus N)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)'$.
Por tanto,

$$\begin{aligned}&\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \sim \\ &\sim (\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}) \coprod (\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}) \sim \mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3.\end{aligned}$$

La descomposición que hemos construido usa ≤ 256 piezas, pero se puede hacer con 5 piezas.

Resumen de la prueba

Poner esto bien 1. Vemos que F2 tiene una descomposición paradójica.
2. Vemos que F2 actúa libremente sobre (S2-N)', así que (S2-N)' tiene una descomposición paradójica.
3. Vemos que B3∼(S2-N)'.
4. Yatááá ergo B3 también tiene una descomposición paradójica :).

Demostración del Teorema de Banach-Tarski

Comenzamos recordando el siguiente resultado de teoría de conjuntos:

Theorem (Schröder, Bernstein)

Dadas dos funciones $f : A \to B$ *y* $g : B \to A$ *inyectivas, podemos construir una biyección* $h : A \to B$ *tal que en todo punto,* $h(x)$ *es o bien* $f(x)$ *o* $g^{-1}(x)$*.*

Corolario

Si A *es equidescomponible a un subconjunto de* B *y* B *es equidescomponible a un subconjunto de* A*, entonces* $A \sim B$*.*

Sabiendo esto, para demostrar que cualesquiera dos conjuntos acotados y con interior no vacío son equidescomponibles es suficiente con la siguiente proposición:

Demostración del Teorema de Banach-Tarski

Proposición

Dados un conjunto acotado A y una bola B de radio > 0, A es equidescomponible a un subconjunto de B.

Para probar esto, sea una colección de bolas $B_1, \ldots, B_n$ del mismo radio que B tal que A está contenido en $\cup_{i=1}^{n} B_i$.
Entonces $(B_1 \cup B_n) \cap A$ está contenido en la unión de dos bolas, por tanto es equidescomponible a un subconjunto contenido en B_1.
De modo que A es equidescomponible a un conjunto contenido en $\cup_{i=1}^{n-1} B_i$. Repitiendo este proceso $n-2$ veces más llegamos a que A es equidescomponible a un subconjunto de B_1.

Importancia de la paradoja de Banach-Tarski

Sea G el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$ que preservan la orientación.

Corolario

No existe una medida m finitamente aditiva G-equivariante en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ tal que $m(\mathbb{B}^3) \in (0, \inf)$.

Esto es una consecuencia directa de que si $A \sim B$, entonces $m(A) = m(B)$.