La Paradoja de Banach-Tarski en detalle

Saúl Rodríguez Martín

January 18, 2026

Contenidos

1 Introducción

La paradoja de Banach-Tarski es una de los resultados más anti-intuitivos de las matemáticas modernas, y una de las principales razones por las que algunos no están cómodos con razonamientos que usan el axioma de elección: cuando los matemáticos vieron que te permitía dividir una bola en dos, algunos dijeron, 'pues mejor no usamos este axioma no?'. Pero a día de hoy no hay mucho reparo en usarlo: por ejemplo, se usa para probar cosas tan sencillas como que si tienes una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y para toda sucesión x_n convergente a $x \in \mathbb{R}$, $f(x_n)$ converge a $f(x)$, entonces f es continua[1].

Pero, ¿qué dice este axioma? Una forma de expresarlo es la siguiente:

Axioma 1 (Axioma de elección)**.** *Dada una colección $\{A_\alpha\}_\alpha$ de conjuntos disjuntos dos a dos, podemos encontrar un conjunto B que contiene exactamente un elemento de cada uno de los A_α.*

Parece algo natural e inofensivo. El objetivo de este pdf es probar en detalle la paradoja de Banach Tarski, indicando dónde se usa el axioma de elección en su prueba y centrándonos en cómo se usa una descomposición paradójica del grupo libre $\mathbb{F}_2$ y la existencia de un grupo de rotaciones isomorfo a $\mathbb{F}_2$ para probar la paradoja.

2 Equidescomponibilidad y el teorema de Banach-Tarski

Definición 2. Primero un poco de notación: Dados subconjuntos $A, A_1, \dots, A_n$ de un conjunto X decimos que $A = A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$ si $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ y los A_i son disjuntos dos a dos.

Diremos que dos espacios métricos A, B son equidescomponibles, $A \sim B$, si existen particiones de A y B,

$$A = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$$

$$B = B_1 \sqcup B_2 \sqcup \dots \sqcup B_n$$

e isometrías $f_1, \dots, f_n$ tales que $f_i(A_i) = B_i$.

Un par de propiedades fáciles de obtener:

Proposición 3. *$\sim$ es una relación de equivalencia. Además, si $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ son subespacios de un espacio métrico X y A_i es disjunto con B_i, entonces $A_1 \cup B_1 \sim A_2 \cup B_2$.*

Demostración. Lo único que no es directo de la definición es que $\sim$ cumple la propiedad transitiva: si $A \sim B$ mediante funciones $f_i : A_i \to B_i, i = 1, \dots, m$ y $B \sim C$ mediante funciones $g_j : B'_j \to C_j, j = 1, \dots, n$, podemos considerar los conjuntos $B_{i,j} = B_i \cap B'_j$

[1] También es cierto que para eso vale con alguna forma más débil del axioma de elección, que es el axioma de elección numerable. El axioma de elección numerable no implica el teorema de Banach Tarski

(alguno de ellos puede ser vacío). Estos conjuntos forman una partición de B. Para ver que $A \sim C$, dividimos A en los conjuntos $A_{i,j} = f_i^{-1}(B_{i,j})$ y C en los conjuntos $C_{i,j} = g_j(B_{i,j})$. Entonces, las funciones $g_{i,j} \circ f_{i,j}$ son una isometría de $A_{i,j}$ en $C_{i,j}$, probando que $A \sim C$. $\square$

Veamos algunos ejemplos de pares de conjuntos equidescomponibles:

1. ¿Es la recta real equidescomponible a la recta real sin un punto?

   Sí: Para comprobarlo $\mathbb{R}$ en los dos conjuntos, $\mathbb{N}$ $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, y $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ en los dos conjuntos $1 + \mathbb{N}$ y $\mathbb{R} \setminus N$. Como $\mathbb{N}$ y $1 + \mathbb{N}$ son isométricos, hemos acabado.

2. ¿Es la $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$ equidescomponible a $\mathbb{S}^1$ sin un punto?

   Sí. Considerando la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$, podemos dividirla en dos subconjuntos, $A = \{e^{ni}; n = 0, 1, \dots\}$ y $B = \mathbb{S}^1 \setminus A$. Llamando r a la rotación de ángulo 1 (es decir, un radián) alrededor del origen, vamos a probar que $\mathbb{S} \setminus \{1\} = B \sqcup r(A)$.

   Llamando $p_n = e^{ni}$, tenemos que los puntos p_n son todos distintos, ya que si $p_n = p_m$, $e^{(n-m)i} = 1$, por tanto $n - m$ tendría que ser un múltiplo entero de 2π, lo cual es imposible. De modo que, como $r(p_n) = p_{n+1} \forall n$, $r(A) = \{r(p_n); n = 0, 1, \dots\} = \{p_{n+1}; n = 0, 1, \dots\} = A \setminus \{1\}$, como queríamos.

   En este caso la rotación r tiene un ángulo $\alpha = 1$. La misma demostración habría funcionado con cualquier ángulo α tal que $\frac{\alpha}{2\pi}$ es irracional, sin embargo no funciona si $\frac{\alpha}{2\pi}$ es racional: en ese caso los p_n no son distintos, forman un polígono regular, y en ese caso $B \sqcup r(A)$ es $\mathbb{S}^1$, no $\mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$.

3. ¿Es la bola $\mathbb{B}^3$ equidescomponible a $\mathbb{B}^3$ sin un punto p?

   Sí. Elegimos una circunferencia S dentro de la bola y que contiene a p. Ahora usamos el apartado anterior para transformar S en $S \setminus \{p\}$. Dejando $\mathbb{B}^3 - S$ fijo, hemos transformado $\mathbb{B}^3$ en $\mathbb{B}^3 - \{p\}$.

4. Es la esfera $\mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ equidescomponible a $\mathbb{S}^2 \setminus N$, donde N es un subconjunto numerable de $\mathbb{S}^2$?

   Sí. Comenzamos eligiendo un punto p tal que ni p ni $-p$ están en N (esto es posible ya que $N \cup (-N)$ no es toda la esfera). Dado un ángulo α, llamaremos r_α a la rotación de ángulo α respecto al eje formado por el origen y p.

   Supongamos que α cumple que $r_\alpha^m(N) \cap N = \varnothing \ \forall m \geq 0$. Entonces, llamando $M = \cup_{m=0}^{\infty} r_\alpha^m(N)$, podemos razonar igual que en el ejemplo 2 para deducir que $r(M) = M \setminus N$, por tanto $\mathbb{S}^2 \setminus N = (\mathbb{S}^2 \setminus M) \sqcup r_\alpha(M)$ y habremos acabado.

   De modo que solo tenemos que encontrar α tal que $r_\alpha^m(N) \cap N = \varnothing \ \forall m \geq 0$. Para cada m, esto quiere decir que $\forall i, j$, $r_\alpha^m(p_i) \neq p_j$. Pero, dados i, j, m, hay un conjunto finito (a veces vacío) de ángulos en $[0, 2\pi)$, que llamaremos $A_{i,j,m}$, tales que $r_\alpha^m(p_i) = p_j$. Con coger α de forma que no esté en ningún conjunto $A_{i,j,m}$ será suficiente. Tal α existe ya que solo hay numerables $A_{i,j,m}$, y cada uno de ellos es finito

El teorema de Banach tarski nos dice algo bastante sorprendente:

Teorema 4 (Banach, Tarski, 1924)**.** *Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ subconjuntos acotados que contienen alguna bola de radio > 0. Entonces $A \sim B$.*

Por ejemplo, una bola y un tetraedro serían equidescomponibles. O, una bola cerrada sería equidescomponible a una bola abierta (de cualquier radio positivo ambas). Pero el caso más famoso es este:

Paradoja 5 (Banach, Tarski)**.** *Una bola cerrada de radio 1 es equidescomponible a dos bolas cerradas de radio 1.*[2]

Vamos a comenzar probando la paradoja y a partir de ella será fácil probar el teorema.

3 Demostración de la paradoja de Banach-Tarski

En esta sección demostraremos la paradoja de Banach Tarski a partir del siguiente resultado (que se probará en las siguientes secciones):

Lema 6. *Existe un conjunto numerable $N \subseteq \mathbb{S}^2$ tal que $\mathbb{S}^2 \setminus N \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N) \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)$. Concretamente, hay una partición de $\mathbb{S}^2$ en cuatro subconjuntos A, B, C, D y dos rotaciones r_1, r_2 que fijan el origen de forma que $\mathbb{S}^2 = A \sqcup r_1(B) = C \sqcup r_1(D)$.*

En lo próximo, llamaremos $X' = \{kp; p \in X, k \in (0,1]\}$, para cualquier subconjunto X de la esfera. Es decir, X' el resultado de coger la unión de todos los segmentos que unen puntos de X al origen, y quitarle el origen. Estas dos propiedades son directas de las definiciones:

- Si r es una rotación que fija el origen y $X \subseteq \mathbb{S}^2$, entonces $r(X)' = r(X')$.
- Si $\mathbb{S}^2 \supseteq X = X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_n$, entonces $X' = X_1' \sqcup \cdots \sqcup X_n'$

Proposición 7. *Si $A, B \subseteq \mathbb{S}^2$ y $A \sim B$ mediante isometrías $f_i : A_i \to B_i$, donde las f_i son rotaciones que fijan el origen, entonces $A' \sim B'$.*

Demostración. Por las propiedades anteriores, $A' = \sqcup_i A_i'$, $B' = \sqcup_i B_i'$ y $f_i(A_i') = (f_i(A_i))' = B_i'$, por tanto $A' \sim B'$. □

Corolario 8. $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)'$.

Demostración. En el quinto ejemplo de la primera sección probamos que $\mathbb{S}^2 \sim \mathbb{S}^2 \setminus N$ usando solo rotaciones, por tanto $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim (\mathbb{S}^2)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)'$ □

[2] 10 años antes de que Banach y Tarski publicaran su teorema, Hausdorff publicó un artículo probando una paradoja muy similar de la que se puede deducir fácilmente la paradoja de Banach-Tarski.

Corolario 9. $(\mathbb{S}^2 \setminus N)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)'$.

Demostración. Se obtiene de aplicar la proposición 7 al lema 6. □

Con esto y el lema 6 ya tenemos demostrada la paradoja: el cuarto ejemplo de la primera sección dice que $\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$, por tanto:

$$\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \sim (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \coprod (\mathbb{S}^2 \setminus N)' \sim \mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \coprod \mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim \mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3 \quad (*)$$

Usando este método, ¿en cuántas piezas hemos tenido que descomponer la bola para obtener dos bolas rotando las piezas? Una cota superior fácil viene dada por que, como hemos visto en la prueba de 3, si $A \sim B$ usando n piezas y $B \sim C$ usando m piezas, entonces $A \sim C$ usando $\leq nm$ piezas. Ahora bien, en las cinco descomposiciones de $(*)$ hemos usado $2, 2, 4, 4$ y 4 piezas respectivamente, por tanto la equidescomposición de $\mathbb{B}^3$ en $\mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3$ ha requerido $\leq 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$ piezas. Esta cota puede rebajarse mucho cambiando detalles de cómo funciona el método, y de hecho en [5] se prueba que hay una equidescomposición de $\mathbb{B}^3$ en $\mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3$ usando solo 5 piezas, y que es imposible hacerlo con 4 piezas. Describimos la fácil prueba de este último resultado que aparece en [5]:

Teorema 10. *No hay una equidescomposición $\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3$ que use ≤ 4 piezas.*

Demostración. Con 3 piezas o menos es obvio que no se puede, ya que una de las 3 piezas tendría que ser toda la bola. Con 4 piezas, el enunciado equivale a tener $\mathbb{B}^3 = A_1 \sqcup A_2 \sqcup A_3 \sqcup A_4$ de modo que $\mathbb{B}^3 = f_1(A_1) \sqcup f_2(A_2) = f_3(A_3) \sqcup f_4(A_4)$, donde f_i son isometrías. Si esto sucede, alguna rotación tiene que tener $f(0) \neq 0$, ya que si no $f_1(A_1) \sqcup f_2(A_2)$ y $f_3(A_3) \sqcup f_4(A_4)$ no podrían contener ambas el centro de $\mathbb{B}^3$.

Supongamos que $f_1(0) \neq 0$. Entonces $f_1(A_1) \cap \mathbb{S}^2$ está contenido estrictamente en un hemisferio de $\mathbb{S}^2$. Por tanto $f_2(A_2)$ contiene más de un hemisferio de $\mathbb{S}^2$, lo cual implica que $f_2(0) = 0$ y A_2 contiene más de la mitad de $\mathbb{S}^2$. De modo que, al ser A_2 disjunto con A_3 y A_4, estos últimos no pueden intersecar S^2 en más de un hemisferio, por tanto $f_3(A_3) \sqcup f_4(A_4)$ no contiene toda la esfera, lo cual es una contradicción. □

4 El grupo libre $\mathbb{F}_2$

Lo que sigue a continuación es una descripción de la construcción del grupo libre $\mathbb{F}_2$ omitiendo algunos detalles. Una descripción detallada de los grupos libres y su construcción necesita varias páginas, y puede encontrarse por ejemplo al principio del capítulo 11 de [4].

Consideremos el conjunto X de palabras que se pueden formar con los caracteres a, b, a^{-1} y b^{-1} (incluyendo la palabra vacía, que llamaremos e). Diremos que una palabra es *reducida* si no contiene una expresión de tipo aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1} o $b^{-1}b$. Entonces, el grupo libre $\mathbb{F}_2$ tendrá como elementos las palabras reducidas, y el producto de dos palabras

$w = x_1 \dots x_n$ y $w' = y_1 \dots y_m$, donde $x_i, y_j \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$, vendrá dado por concatenarlas, obteniendo una palabra $x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m$, y luego simplificar todas las expresiones aa^{-1}, $a^{-1}a$, bb^{-1} o $b^{-1}b$ hasta obtener otra palabra reducida. Este producto está bien definido y da una estructura de grupo a $\mathbb{F}_2$ (esto no es obvio).

De modo que los elementos del grupo libre serán:

$$e, a, b, a^{-1}, b^{-1}, a^2, ab, ab^{-1}, a^{-2}, a^{-1}b, a^{-1}b^{-1}, b^2, ba, ba^{-1}, b^{-2}, b^{-1}a, b^{-1}a^{-1}, a^3, a^2b, \dots$$

Teorema 11. *$\mathbb{F}_2$ es numerable.*

Demostración. Sea A_n el conjunto de palabras reducidas de longitud n (es decir, con n caracteres). Entonces A_n tiene $\leq 4^n$ elementos. Por tanto $\mathbb{F}_2 = \cup_{n=0}^{\infty} A_n$ es una unión numerable de conjuntos finitos, ergo es numerable. □

Lema 12. *El grupo $\mathbb{F}_2$ tiene una partición en cuatro subconjuntos X_1, X_2, X_3, X_4 tales que $\mathbb{F}_2 = X_1 \sqcup a^{-1}X_2 = X_3 \sqcup b^{-1}X_4$.*

Estas tipo de particiones de grupos se llaman *descomposiciones paradójicas*, precisamente porque se pueden usar para crear descomposiciones paradójicas de la esfera como la de la paradoja de Banach Tarski. La idea del lema está sacada de [2].

Demostración. Sean

$$\begin{aligned} X_1 &= \{w \in \mathbb{F}_2; w \text{ empieza por } a^{-1}\} \\ X_2 &= \{w \in \mathbb{F}_2; w \text{ empieza por } a\} \\ X_3 &= \{w \in \mathbb{F}_2; w \text{ empieza por } b^{-1}\} \\ X_4 &= \{w \in \mathbb{F}_2; w \text{ empieza por } b\}. \end{aligned}$$

Se cumple que $\mathbb{F}_2 = X_1 \sqcup a^{-1}X_2 = X_3 \sqcup b^{-1}X_4$. Lo único que falta para que se cumpla el enunciado es que X_1, X_2, X_3, X_4 formen una partición de $\mathbb{F}_2$, pero e no está en ninguno de los 4.

Para arreglarlo basta cambiar X_3 y X_4 por $X_3' = X_3 \setminus \{b^{-1}, b^{-2}, b^{-3}, \dots\}$ y $X_4' = X_4 \cup \{e, b^{-1}, b^{-2}, b^{-3}, \dots\}$. □

5 Demostración del lema 6

Lema 13. *Sea G el subgrupo de $SO(3)$ generado por las matrices*

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces G es isomorfo a $\mathbb{F}_2$.

Demostración. Por la propiedad universal de los grupos libres (véase wikipedia), podemos definir un homomorfismo $f : \mathbb{F}_2 \to G$ por $f(a) = M_1, f(b) = M_2$. Es sobreyectivo porque su imagen es un subgrupo de G que contiene a M_1 y M_2. Comprobar que es inyectivo es más complicado: para ello tenemos que probar que cualquier palabra no trivial y reducida formada por las letras M_1, M_2 no será la identidad en G. Esto no es obvio. Una demostración totalmente elemental se puede encontrar en esta exposición de Tao sobre la paradoja de Banach Tarski. La demostración que incluyo a continuación es algo distinta, tomada de estas notas [1] también de Tao. Es un poco más larga pero incluye un bonito resultado que sirve para demostrar que un grupo está generado libremente por dos elementos: el lema del Ping Pong.

Lema 14 (Lema del Ping Pong)**.** [3] *Sea H un grupo que actúa sobre un conjunto X, y sean $g, h \in H$. Supongamos que hay subconjuntos disjuntos de X, A_+, A_-, B_+, B_- tales que su unión no es todo X y*

$$\begin{array}{c} a(X \setminus A_+) \subseteq A_-; a(X \setminus A_-) \subseteq A_+; \\ a(X \setminus B_+) \subseteq B_-; a(X \setminus B_-) \subseteq B_+. \end{array} \tag{1}$$

Entonces a, b generan un subgrupo de H isomorfo a $\mathbb{F}_2$.

Demostración del lema del Ping Pong. Basta probar que ninguna palabra w reducida en $\{a, b\}$ representa el elemento $e \in G$. Esto pasa porque dado $x \in X \setminus (A_+ \cup A_- \cup B_+ \cup B_-)$, podemos demostrar por inducción en la longitud de w y usando los contenidos de 1 que $w(x) \in A_+ \cup A_- \cup B_+ \cup B_-$. Por tanto $w(x) \neq x$, ergo w no es la identidad en G. $\square$

Ahora aplicamos el lema del Ping Pong para deducir que el grupo G generado por $a = M_1$ y $b = M_2$ es libre. Vamos a considerar la acción de G sobre el conjunto X cociente de $\mathbb{Q}^3$ por la relación de equivalencia dada por $v \sim 5^k v \ \forall v \in \mathbb{Q}^3, k \in \mathbb{Z}$. Llamando $\overline{v}$ a la clase de v, definimos

$$A_\pm = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}; x, y, z \in \mathbb{Z}, x = \pm 3y \bmod 5, z = 0 \bmod 5. \right\}$$

$$B_\pm = \left\{ \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}; x, y, z \in \mathbb{Z}, z = \pm 3y \bmod 5, x = 0 \bmod 5. \right\},$$

y se puede comprobar con aritmética modular que $A_\pm, B_\pm$ cumplen las condiciones del lema del Ping Pong. $\square$

[3] Hay otras versiones similares pero no iguales del lema del Ping Pong, y muchas generalizaciones que tienen en cuenta más de dos elementos o subgrupos en vez de elementos. Lo único que tienen todas en común es la idea de la demostración.

Ahora, sea M el conjunto de puntos de la esfera que quedan fijados por algún elemento no trivial de $G \setminus \{e\}$ que no es la identidad. Como cualquier rotación fija 2 puntos de la esfera y G es numerable, M también será numerable.

En lo próximo, dados un subconjunto A de G y un subconjunto X de $\mathbb{S}^2$, llamamos AX a $\{a(x); a \in A, x \in X\}$.

Lema 15. *G actúa libremente sobre $\mathbb{S} \setminus N$,*[4] *donde $N = GM$.*

Notemos primero que N es numerable, ya que G y M son numerables. De hecho se cumple que $N = M$, aunque esto no nos hará falta. La clave para probar $N = M$ es que, dados $p \in M$ y $g \in G$ tal que $g(p) = p$, entonces para cualquier $h \in G$ se cumple que $h(p)$ es un punto fijo de $h \circ g \circ h^{-1}$.

Demostración. Que G actúa sobre $\mathbb{S} \setminus N$ es directo ya que $\mathbb{S} \setminus N$ es una unión de órbitas de la acción de G sobre $\mathbb{S}^2$, o sea que $G(\mathbb{S} \setminus N) = \mathbb{S} \setminus N$. Además la acción es libre: si tenemos $g(x) = x$ para ciertos $g \in G \setminus \{e\}$ y $x \in \mathbb{S}^2 \setminus N$, entonces $x \in M$ por definición de M, y esto es una contradicción ya que $M \subseteq N$. □

Demostración del lema 6. Por el lema 12, podemos particionar G en cuatro conjuntos Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 tales que $G = Y_1 \sqcup M_1^{-1} Y_2 = Y_3 \sqcup M_2^{-1} Y_4$.

Ahora es cuando **usaremos el axioma de elección**: en la acción de G sobre $\mathbb{S}^2 \setminus N$, consideramos el conjunto de órbitas $\mathcal{O} = \{Gx; x \in \mathbb{S}^2 \setminus N\}$ y seleccionamos un conjunto O que contiene exactamente un elemento de cada órbita.

Consideremos los cuatro conjuntos Y_1O, Y_2O, Y_3O, Y_4O. Entonces tenemos que:

- $Y_iO \cap Y_jO = \varnothing$ si $i \neq j$.

  Aquí es donde usamos que la acción de G en $\mathbb{S}^2 \setminus N$ es libre: Si $y_1 o_1 = y_2 o_2$, con $y_1 \in Y_i, y_2 \in Y_j, o_1, o_2 \in O$, entonces o_1 y o_2 están en la misma órbita de la acción, por tanto $o_1 = o_2$, así que $y_1^{-1} y_2 o_1 = o_1$ y como la acción es libre, $y_1^{-1} y_2 = e$, por tanto $y_1 = y_2$, así que $Y_i = Y_j$.

- $\cup_{i=1}^4 Y_i = \mathbb{S}^2 \setminus N$.

  Ya que esta unión es GO, GO es $\mathbb{S}^2 \setminus N$ porque cualquier punto p de $\mathbb{S}^2 \setminus N$ tiene un elemento $o \in O$ en su órbita, por tanto $p = g(o)$ para algún $g \in G$, ergo $p \in GO$.

- $\mathbb{S}^2 \setminus N = Y_1O \sqcup M_1^{-1}(Y_2O) = Y_3O \sqcup M_2^{-1}(Y_4O)$.

  Esto se deduce directamente de las igualdades $G = Y_1 \sqcup M_1^{-1} Y_2 = Y_3 \sqcup M_2^{-1} Y_4$.

[4] Es decir, si $g(x) = x$ para algún $g \in G$ y $x \in \mathbb{S} \setminus N$, entonces g es la identidad.

Ya podemos demostrar que $\mathbb{S}^2 \setminus N \sim \mathbb{S}^2 \setminus N \sqcup \mathbb{S}^2 \setminus N$: primero dividimos $\mathbb{S}^2 \setminus N$ en los cuatro trozos Y_1O, Y_2O, Y_3O e Y_4O. Entonces, $Y_1O \sqcup M_1^{-1}(Y_2O)$ y $Y_3O \sqcup M_2^{-1}(Y_4O)$ forman dos copias de $\mathbb{S}^2 \setminus N$, y M_1, M_2 son rotaciones, por tanto hemos obtenido dos copias de $\mathbb{S}^2 \setminus N$ a partir de dividir $\mathbb{S}^2 \setminus N$ en cuatro trozos y rotar dos de ellos. □

6 Prueba del teorema de Banach Tarski

Teniendo la paradoja nos va a ser fácil demostrar el teorema de Banach-Tarski, que recordemos que dice que cualquier par de subconjuntos acotados con interior no vacío son equidescomponibles. El resultado fundamental que usaremos es el ejercicio 2.1 de [1]:

Teorema 16 (Banach, Schroder, Bernstein). *Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$, A es equidescomponible a un subconjunto de B y B es equidescomponible a un subconjunto de A, entonces $A \sim B$.*

La demostración va a ser una adaptación de la prueba del teorema de Schröder-Bernstein:

Teorema 17 (Schröder, Bernstein). *Dadas dos funciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$ inyectivas, podemos construir una biyección $h : A \to B$ tal que en todo punto, $h(x)$ es o bien $f(x)$ o $g^{-1}(x)$.*

La segunda parte no se suele incluir en el enunciado, pero es una consecuencia directa de su demostración[5], que se puede encontrar por ejemplo en wikipedia

Demostración de 16. Sean $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ con $B \sim A'$ mediante funciones $f_i : B_i \to A'_i$ y $A \sim B'$ mediante funciones $g_j : A_j \to B'_j$.

Entonces podemos definir inyecciones $f : B \hookrightarrow A$ y $g : A \hookrightarrow B$ definidas a trozos por las f_i y las g_j respectivamente. Por 17 hay una biyección $h : A \to B$ de modo que, $\forall x \in A$, $h(x)$ es o bien $f^{-1}(x)$ o $g(x)$. Es decir, $\forall x \in A$, $h(x)$ es o bien $f_i^{-1}(x)$ para algún i o $g_j^{-1}(x)$ para algún j.

Ahora definamos $C_i = \{x \in A; h(x) = f_i^{-1}(x)\}$ y $D_j = \{x \in A; h(x) = g_j(x)\}$. Es posible que los C_i no sean disjuntos con los D_j, por tanto definimos $D'_j = D_j \setminus \cup_i C_i$, y ahora sí, tenemos que $A \sim B$ mediante las funciones $f_i^{-1} : C_i \to \mathrm{Im}(C_i)$ y $g_j : D'_j \to \mathrm{Im}(D_j)'$. □

Demostración del Teorema 4. Por el teorema anterior nos bastará con demostrar que dados un conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^3$ y una bola $B \subseteq \mathbb{R}^3$, A es equidescomponible a un subconjunto de B.

Para ello, supongamos que podemos recubrir A con las bolas $t_1B, \ldots, t_NB$, siendo las t_i traslaciones. Consideremos el conjunto $A \cap (t_1B \cup t_NB)$: está contenido en la unión de dos copias de B, por tanto es equidescomponible a un subconjunto de t_1B. De modo que

[5] Una demostración muy bonita que **no** usa axioma de elección!

A es equidescomponible a un subconjunto de $t_1B \cup \cdots \cup t_{N-1}B$. Repitiendo este proceso otras $N-2$ veces, llegamos a que A es equidescomponible a un subconjunto de t_1B, por tanto a un subconjunto de B. $\square$

7 El teorema de Banach Tarski en dimensión $\neq 3$

Teorema 18 (Banach, Tarski, 1924)**.** *Sea $n \geq 4$ y $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjuntos acotados con interior no vacío. Entonces $A \sim B$.*

La prueba va a ser análoga al caso $n = 3$.

Lema 19. *Si $k \geq 1$, $\mathbb{B}^3 \times [0,1]^k \sim (\mathbb{B}^3 \times [0,1]^k) \coprod (\mathbb{B}^3 \times [0,1]^k)$.*

Demostración. Sabemos que $\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3$, supongamos que mediante isometrías $f_i : A_i \to B_i$, donde los A_i forman una partición de $\mathbb{B}^3$ y los B_i forman una partición de $\mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3$. Entonces $F_i : A_i \times [0,1]^k \to B_i \times [0,1]^k$ dada por $F_i(p,q) = (f_i(p), q)$ también son isometrías, por tanto $\mathbb{B}^3 \times [0,1]^k \sim (\mathbb{B}^3 \times [0,1]^k) \coprod (\mathbb{B}^3 \times [0,1]^k)$. $\square$

Demostración del teorema 18. Se demuestra igual que el teorema 4, solo que en este caso en vez de recubrir cada conjunto acotado con finitas bolas, lo recubriremos con finitos conjuntos isométricos a $\mathbb{B}^3 \times [0,1]^{n-3}$. $\square$

En los casos $n = 1, 2$, no se cumple el análogo de la paradoja de Banach Tarski, como descubriremos en la siguiente sección.

8 Importancia de la paradoja. Medidas finitamente aditivas

La principal consecuencia de la paradoja de Banach Tarski está en teoría de la medida. Sea G el grupo de isometrías de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 20. *No existe una medida m finitamente aditiva G-equivariante en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ tal que $m(\mathbb{B}^3) \in (0, \inf)$.*

Donde, dado un grupo G actuando sobre un conjunto X, definimos una medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}(X)$ como una función $m : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ tal que $m(\varnothing) = 0$ y $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ si $A, B \subseteq X$ son disjuntos. Diremos que m es G-equivariante si $m(A) = m(g(A)) \forall\ A \subseteq X, g \in G$.

De modo que el enunciado anterior simplemente quiere decir que no hay ninguna medida finitamente aditiva en $\mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ que se preserva por rotaciones, traslaciones y simetrías.

Demostración. Supongamos que tal medida existiera. Como $\mathbb{B}^3 \sim \mathbb{B}^3 \coprod \mathbb{B}^3$, podemos tomar una partición $\mathbb{B}^3 = A_1 \sqcup \cdots \sqcup A_n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ y rotaciones $r_1, \ldots, r_n$ tales que $\mathbb{B}^3 = \sqcup_{i=1}^k r_i(A_i) = \sqcup_{j=k+1}^n r_j(A_j)$. De modo que podemos deducir la igualdad $m(\mathbb{B}^3) = \sum_{i=1}^n m(A_i) = \sum_{i=1}^k m(A_i) + \sum_{i=k+1}^n m(A_i) = m(\mathbb{B}^3) + m(\mathbb{B}^3)$, lo cual es absurdo si $m(\mathbb{B}^3) \in (0, \infty)$. □

Otro resultado que se demuestra igual:

Proposición 21. *No existe una medida de probabilidad finitamente aditiva en* $\mathbb{S}^2$. □

Estas ideas se pueden generalizar: en vez de estudiar la acción de $SO(3)$ en $\mathbb{S}^2$ o la de G $\mathbb{R}^3$ podemos estudiar cualquier acción de un grupo G en un conjunto X, y dar definiciones análogas a las que hemos visto de que dos subconjuntos A, B de X sean G-equidescomponibles o que tengan descomposiciones G-paradójicas. Usando estos conceptos, otros contraejemplos famosos como el conjunto de Vitali, que demuestra que no puede haber una medida numerablemente aditiva en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ que se preserva por traslaciones, se pueden expresar en términos similares a la paradoja de Banach-Tarski.

Los apuntes de Tao [1] dan un muy buen resumen de todos estos conceptos y otros relacionados como la amenabilidad.

Respecto a los casos $n = 1, 2$, tenemos el siguiente teorema que Banach probó en [6] y no vamos a demostrar aquí:

Teorema 22 (Banach, 1923)**.** *Para $n = 1, 2$, existen medidas finitamente aditivas invariantes por isometrías definidas en todo $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ y que coinciden con la medida Lebesgue en la σ-álgebra de Lebesgue.*

Por tanto, como tenemos esas medidas que no son ni 0 ni ∞ en $\mathbb{B}^n$, para $n = 1, 2$ no se cumple $\mathbb{B}^n \sim \mathbb{B}^n \coprod \mathbb{B}^n$.

Referencias

[1] Apuntes de Terence Tao sobre el lema del Ping Pong, amenabilidad y la paradoja de Banach-Tarski. terrytao.wordpress.com/2009/01/08/245b-notes-2.

[2] Clara Löh. *Geometric Group Theory. An Introduction.* Springer (2017).

[3] Francis Edward Su. *The Banach Tarski Paradox* Minor PhD thesis, Harvard University, 1990. math.hmc.edu/su/wp-content/uploads/sites/10/2019/06/The-Banach-Tarski-Paradox.pdf

[4] Joseph J. Rotman. *An Introduction to the Theory of Groups.* Graduate Texts in Mathematics, vol 148. Springer, New York, NY.

[5] Robinson, Raphael. *On the decomposition of spheres.* Fundamenta Mathematicae 34.1 (1947): 246-260. http://eudml.org/doc/213130.

[6] Banach. *Sur le problème de la mesure.* Fundamenta Mathematicae (1923) Vol 4, Issue 1, pg 7-33